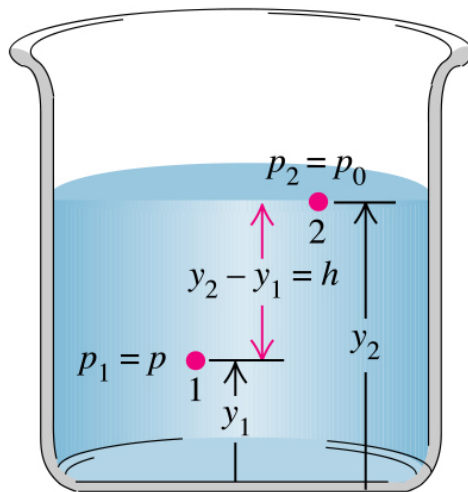


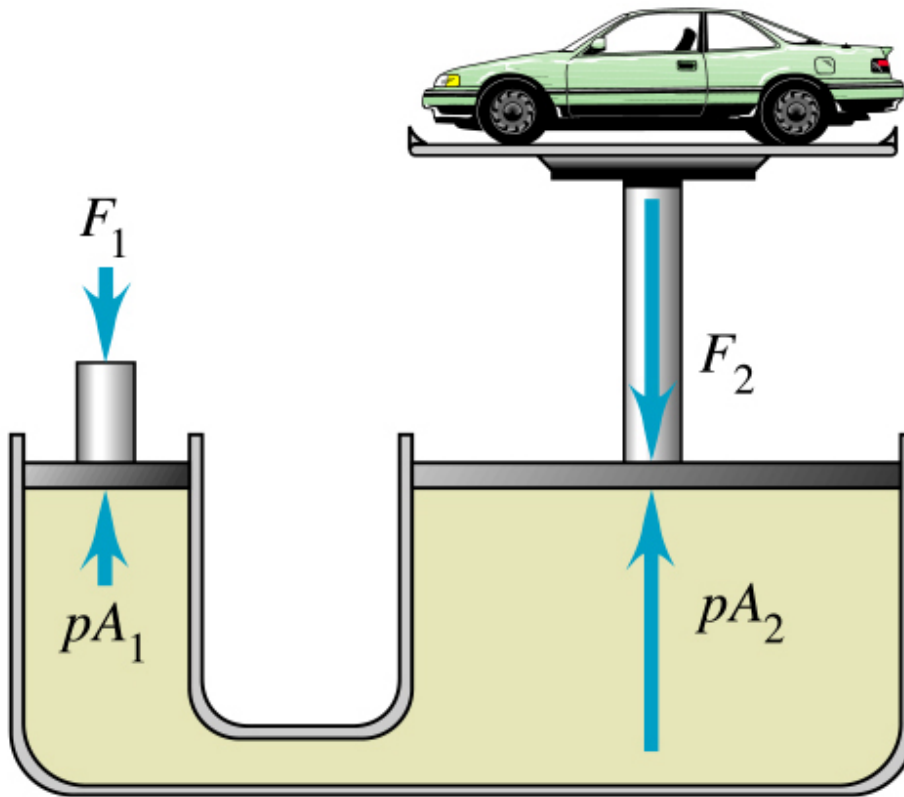
# Prawo Pascala

***Ciśnienie przyłożone do zamkniętej cieczy przenosi się niezmienione do każdego jej punktu i powierzchni naczynia.***



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$$p = p_o + \rho g h$$

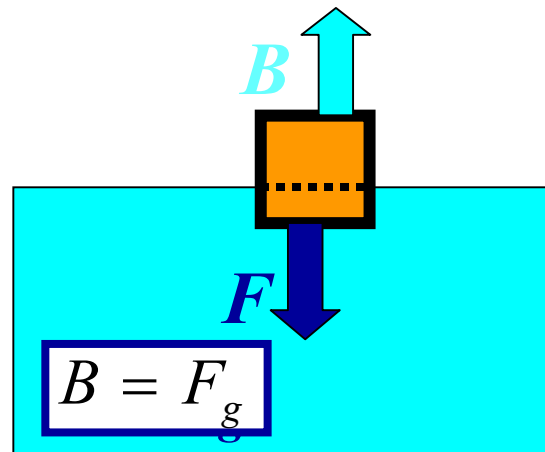


$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1$$

# Prawo Archimiedesa

Siła wyporu działająca na ciało zanurzone w cieczy równa się ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.

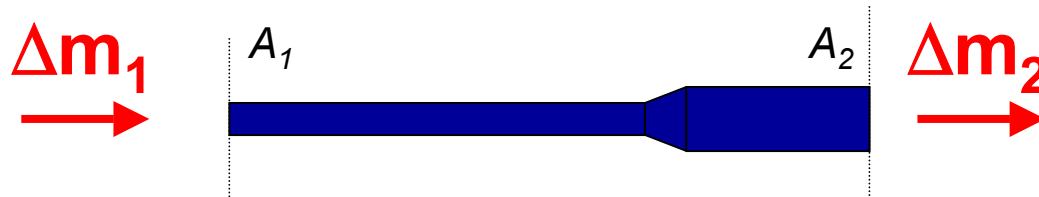


# Ciecz idealna!

Podstawowe własności cieczy „idealnej”:

- 1) Brak lepkości
- 2) Ciecz jest nieściśliwa (ma stałą gęstość)
- 3) Przepływ cieczy jest ustalony (prędkość, gęstość i ciśnienie w każdym punkcie są stałe)
- 4) Ciecz płynie bez **zawirowań**.

# Równanie ciągłości



Ciecz jest nieściśliwa, stąd w danym przedziale czasowym  $\Delta t$ , taka sama ilość masy wpływa przez powierzchnię  $A_1$  co wypływa przez powierzchnię  $A_2$ .

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\Delta m_1 = \rho \Delta V_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

$$\Delta m_2 = \rho \Delta V_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

# Równanie ciągłości



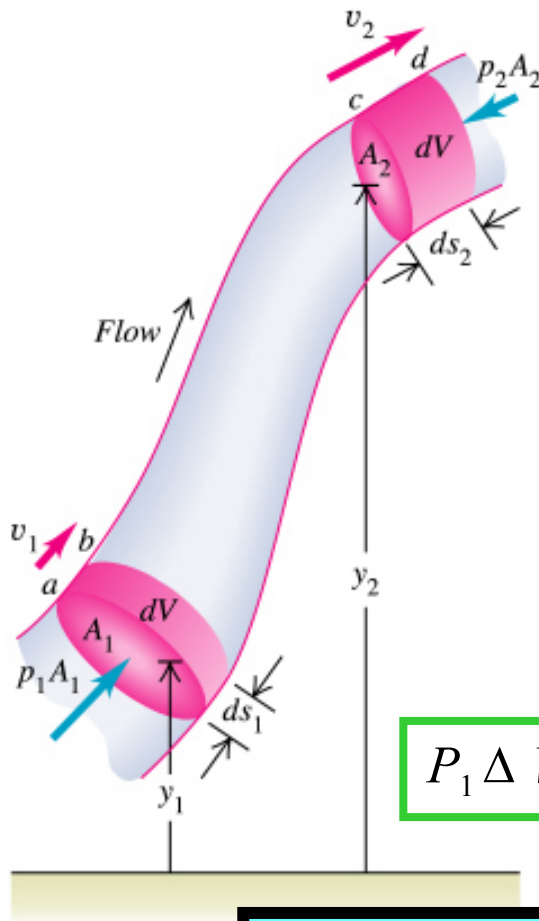
$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

# Równanie Bernoulliego

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constant}$$

# Równanie Bernoulliego



$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta U \\ &= -(mgh_2 - mgh_1) \\ &= mg(h_1 - h_2) \end{aligned}$$

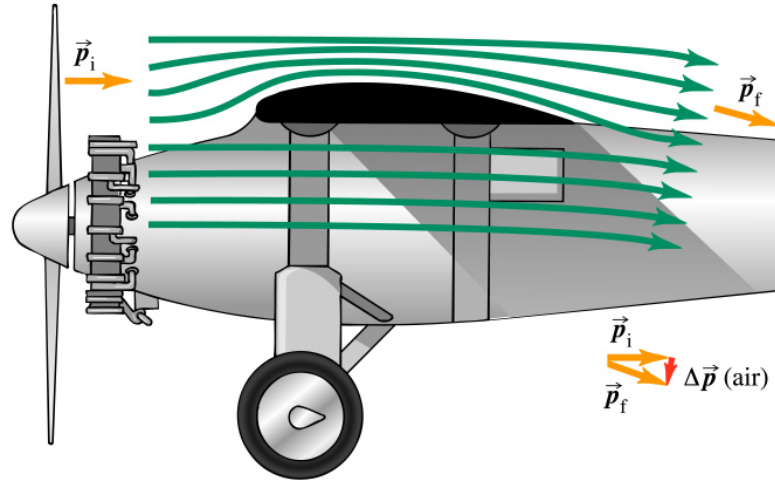
$$\begin{aligned} W_{net} &= W_1 + W_2 + W_g \\ &= P_1\Delta V - P_2\Delta V + mg(h_1 - h_2) \end{aligned}$$

$$P_1\Delta V - P_2\Delta V + mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



# *Siła nośna skrzydeł*



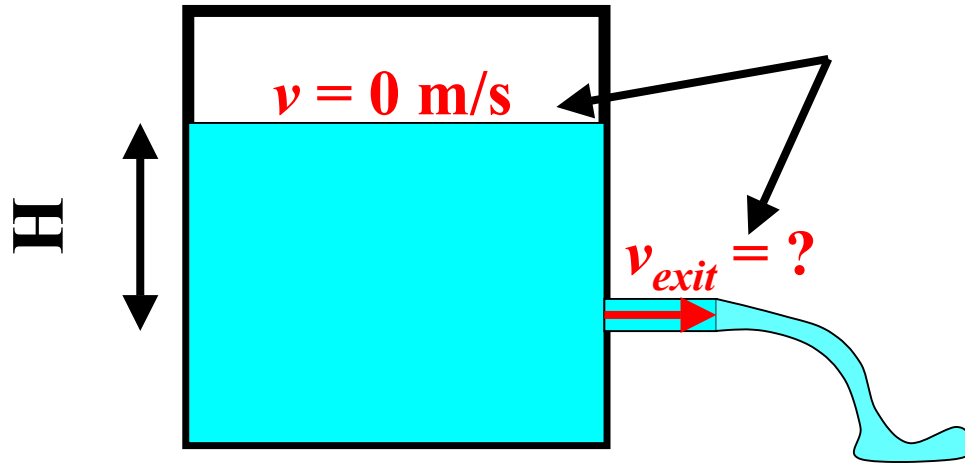
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Jeżeli  $v_1 > v_2$ , to  $P_1 < P_2$ . Ta różnica **ciśnień** wywołuje pojawienie się **siły nośnej**

# szybkość wypływu cieczy

W obu punktach ciśnienie jest w przybliżeniu równe ciśnieniu atmosferycznemu



$$P_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H = P_a + \frac{1}{2} \rho v_{exit}^2$$

$$v_{exit} = \sqrt{2 g H}$$

# Jak działa barometr !

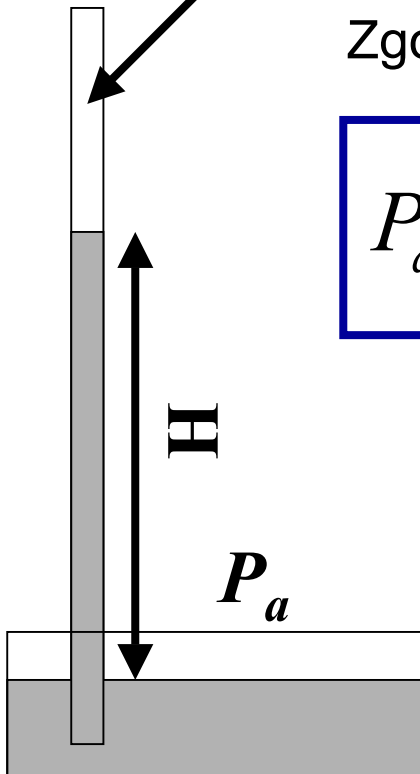
próżnia (i.e.,  $P = 0$ )

Zgodnie z prawem Bernoulliego

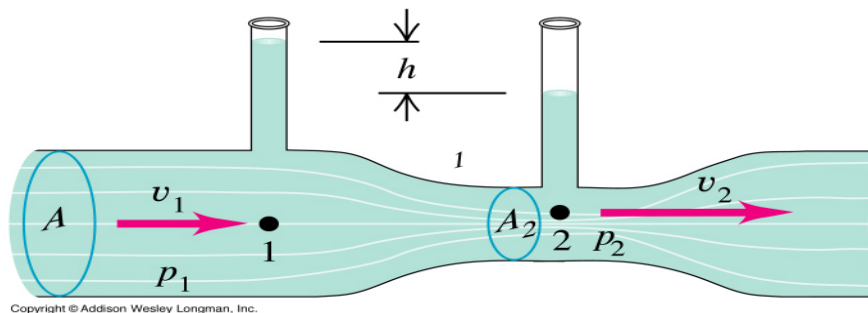
$$P_a + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g y_0 = P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H$$

$$P_a = \rho g H$$

$$H = \frac{P_a}{\rho g}$$



# Pomiar prędkości przepływu ciecży

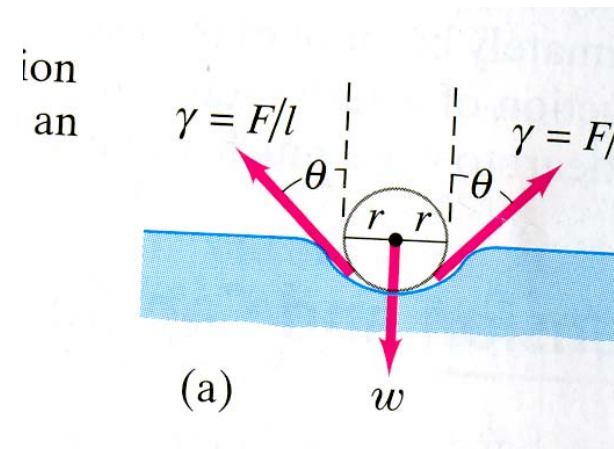


$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

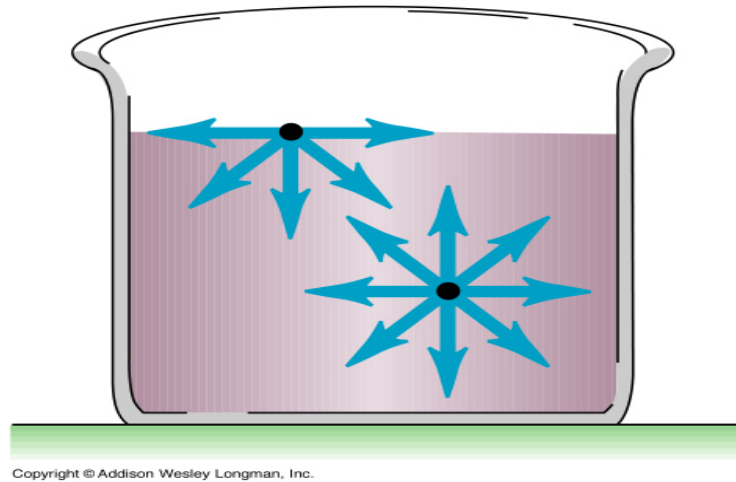
$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

# Napięcie powierzchniowe

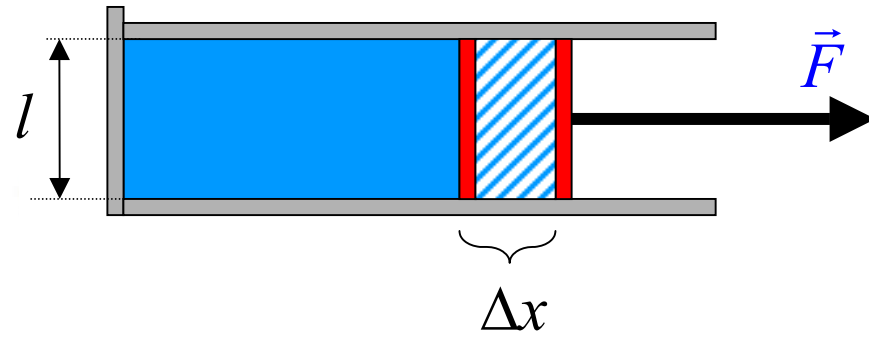
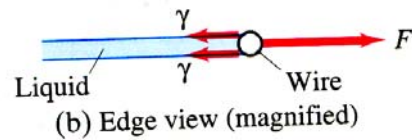
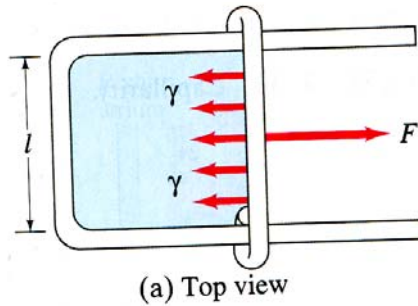


# Napięcie powierzchniowe



Napięcie powierzchniowe  $\gamma$  jest to praca jaką należy wykonać aby zwiększyć powierzchnię cieczy o jednostkę.

# Napięcie powierzchniowe



$$\gamma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta x}{2l \cdot \Delta x}$$

$$\gamma = \frac{F}{2l}$$

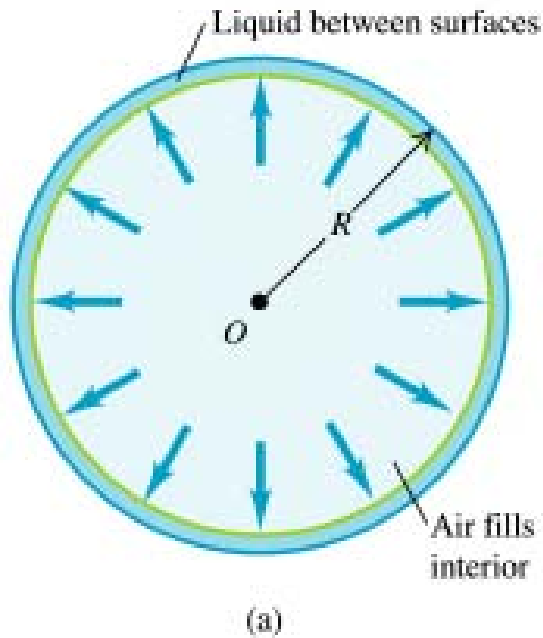
# Napięcie powierzchniowe

Ciecz	Napięcie powierzchniowe [ N/m ]
Woda ( 20°C )	0.072
Rtęć	0.44
Benzen (20°C)	0.029
Miedź (1130°C )	1.1



# Ciśnienie powietrza wewnątrz bańki mydlanej

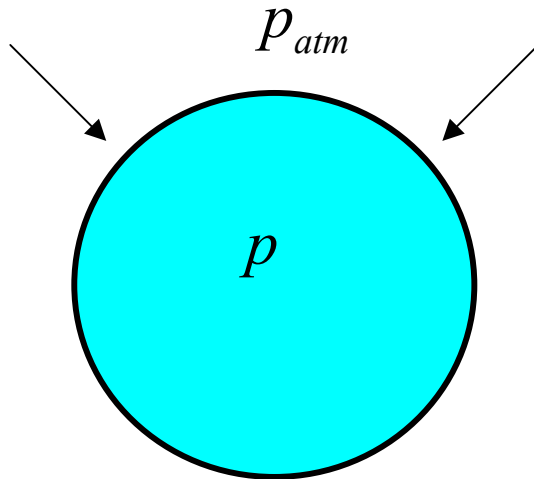
dwie powierzchnie cieczy



$$p = p_{atm} + \frac{4\gamma}{R}$$

# Ciśnienie wewnątrz kropli cieczy

jedna powierzchnia cieczy



$$p = p_{atm} + \frac{2\gamma}{R}$$

# Włóskowatość

- Zjawisko włóskowatości jest rezultatem działania sił przyciągania pomiędzy cząsteczkami a ściankami kapilary ( **siły adhezji** )
- Siły adhezji pomiędzy szkłem ( $\text{SiO}_2$ ) a wodą są większe niż siły oddziaływania pomiędzy cząsteczkami wody ( **siły kohezji** ).
- Wypadkowa siła jest skierowana ku górze powodując zmniejszanie ciśnienia pod powierzchnią cieczy. W wyniku tego poziom wody podnosi się.

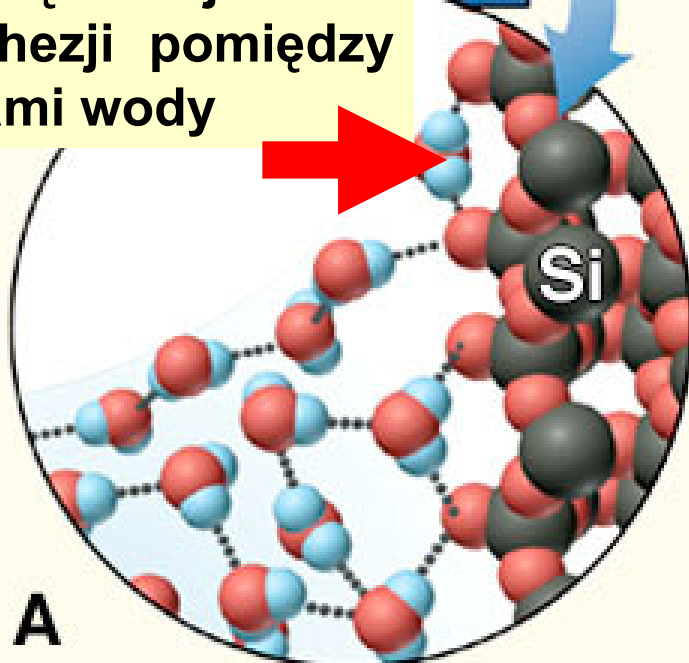


# Shape of the Water or Mercury Meniscus in Glass

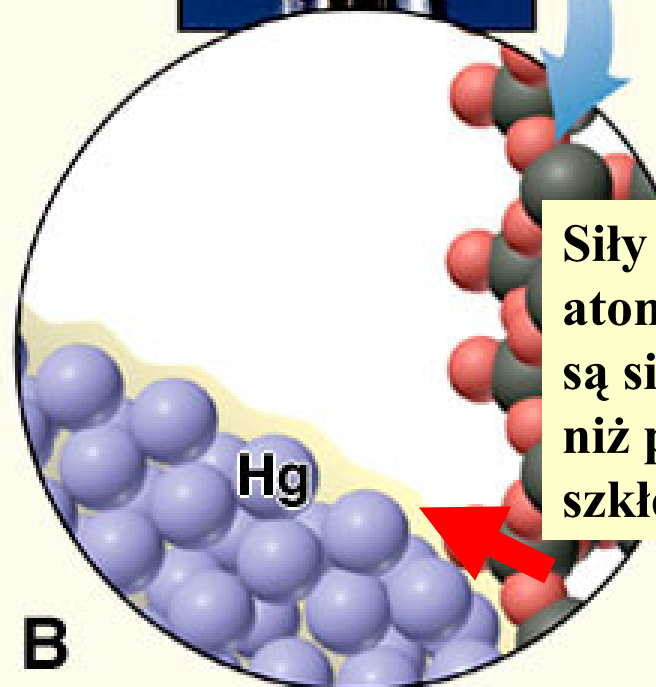


woda - menisk  
wypukły

Siły adhezji pomiędzy  
O-Si-O są silniejsze niż  
siły kohezji pomiędzy  
cząstkami wody

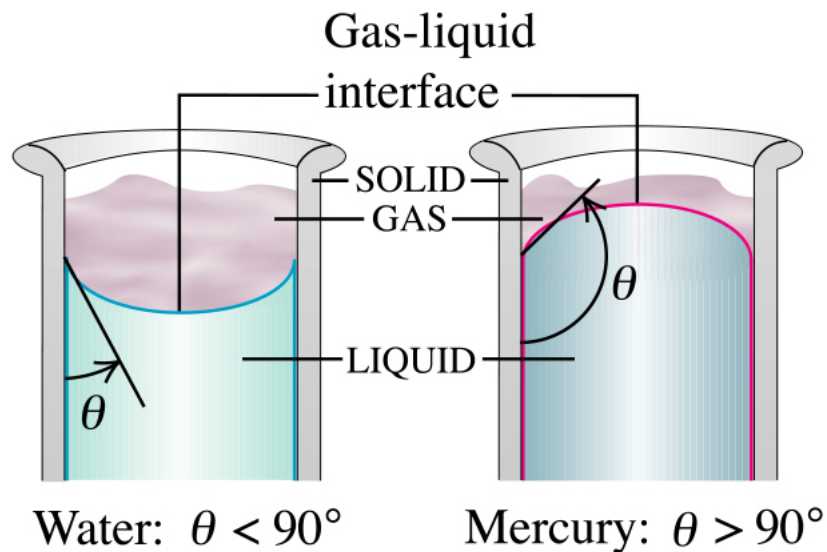


rtęć -  
menisk  
wklęsły

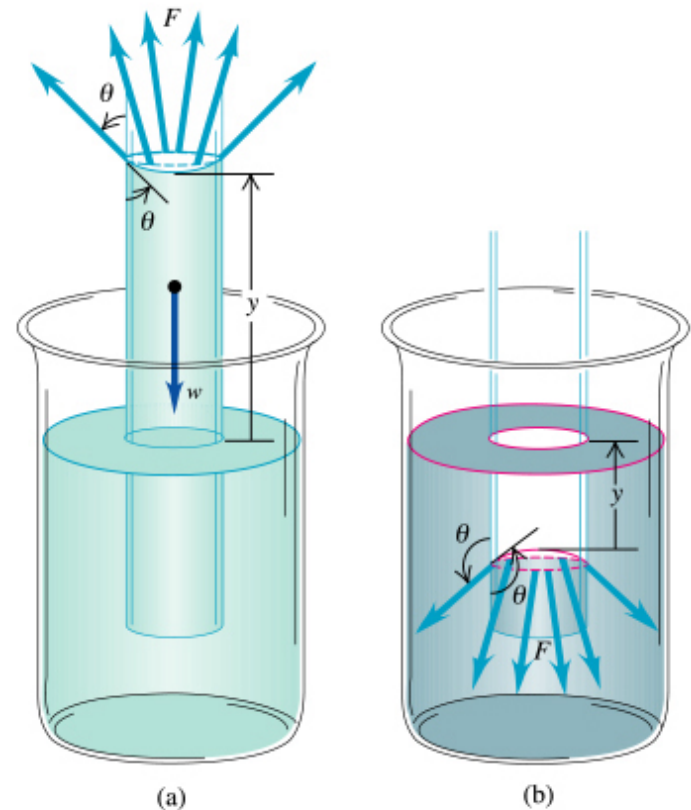


Siły pomiędzy  
atomami rtęci  
są silniejsze  
niż pomiędzy  
szkłem a rtęcią

# Właskowatość



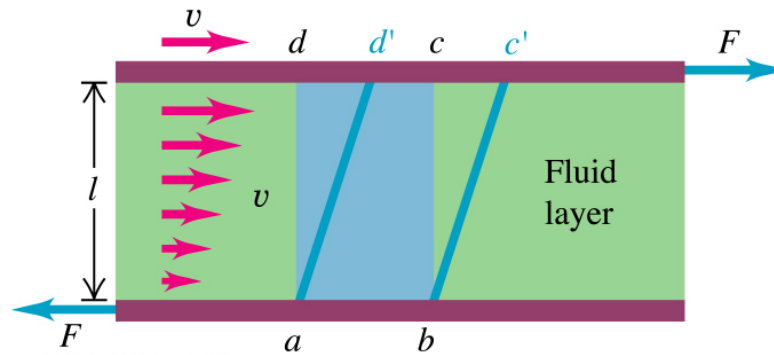
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

# Lepkość cieczy

1.



$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

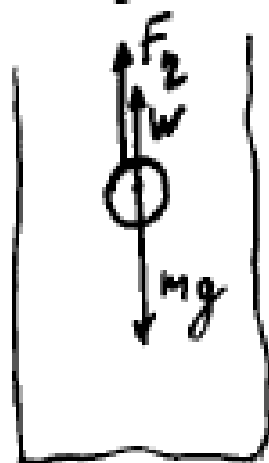
$$[\eta] = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$$

2. Siła oporu Stokes'a



$$F_z = 6\pi r \eta \cdot v$$

3. Przykład



$$F_{\text{wypokowa}} = mg - W - F_2$$

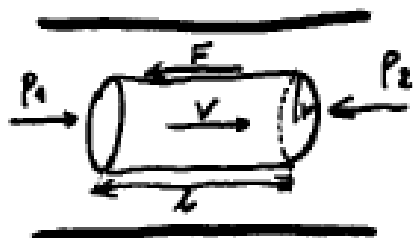
$$W = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w \cdot g$$

$$F_{\text{wyp}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k \cdot g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w \cdot g - 6\pi \eta r \cdot v$$

Stać w prędkości gdy  $F_v = 0$ , stąd

$$v = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\rho_k - \rho_w)$$

## Przepływ cieczy przez okrągły rur



$$S_b = 2\pi r \cdot L$$

Założenia: ciecz płynie ze stałą prędkością tan.  $v$  nie zależy od czasu.

Siła tarcia wewnętrznej

$$F_z = \eta \cdot \left| \frac{\Delta v}{\Delta r} \right| \cdot S_b$$

równowagę sił wypadkową wynikającą z różnicy ciśnień

$$F_p = (P_1 - P_2) \cdot \pi r^2$$

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta r} \right| \cdot 2\pi r L$$



Prędkość maleje wraz z odległością od ścianki, stąd

$$\left| \frac{\Delta v}{\Delta r} \right| = - \frac{dv}{dr}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dr} = - \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} \cdot r}$$

Rozwiązanie:

$$v = - \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot r^2 + C$$

dla  $r = R$  mamy  $v = 0$ , stąd

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2$$

$$\boxed{v(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}$$

gdzie

$$v_0 = v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot R^2$$

