

Fale materii

■ Dualizm falowo-cząstkowy fali elektromagnetycznej.

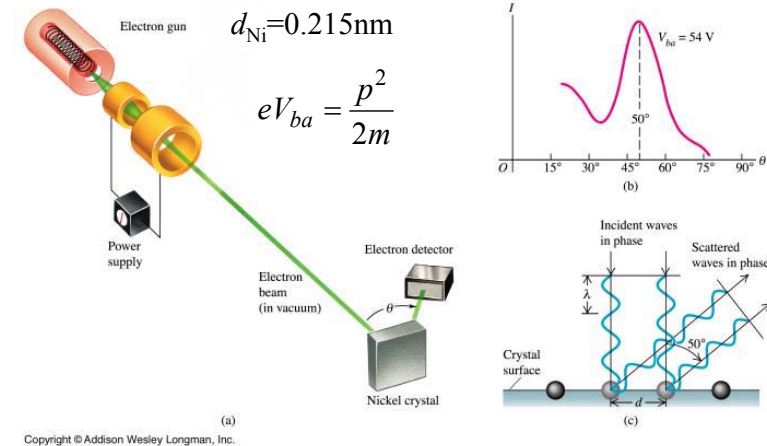
- W zjawiskach takich jak dyfrakcja czy interferencja fala elektromagnetyczna wykazuje typowe własności falowe.
- W zjawiskach takich jak efekt Comptona czy efekt fotoelektryczny fala elektromagnetyczna wykazuje naturę korpuskularną, tzn. jest strumieniem cząstek zwanych **fotonami**.

■ Hipoteza de Broglie'a .

- W 1924 roku L. de Broglie założył, że dualizm cząstkowo - falowy jest własnością charakterystyczną nie tylko dla fali elektromagnetycznej, ale również dla cząstek o masie spoczynkowej różnej od zera. Oznacza to, że cząstki takie jak np. elektrony powinny również wykazywać własności falowe. Fale te nazwał on **falami materii**. Założył, że długość fal materii określona jest tym samym związkiem, który stosuje się do fotonów.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Doświadczenie C.J.Davissona i L.G.Germiera



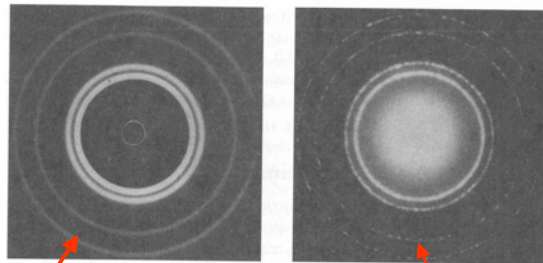
Z dyfrakcji

$$\lambda = d \sin \theta = 0.165\text{nm}$$

Wzór de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} = 0.167\text{nm}$$

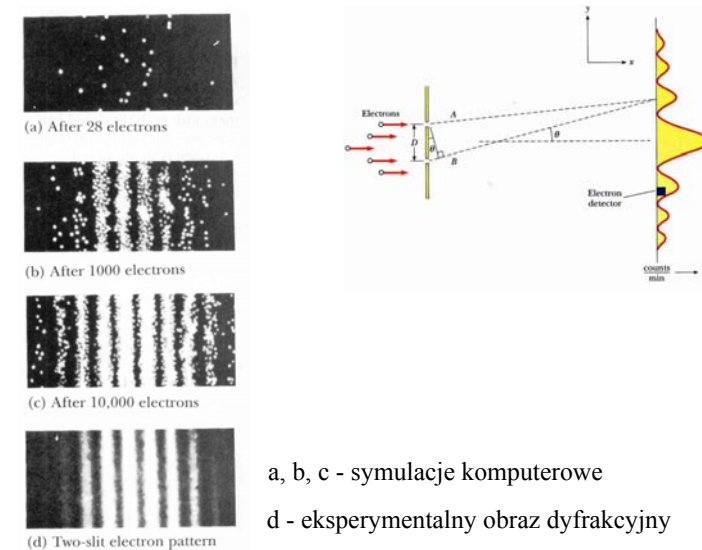
Dyfrakcja na polikrystalicznej folii aluminiowej



Dyfrakcja promieniowania X

Dyfrakcja elektronów

Dyfrakcja elektronów

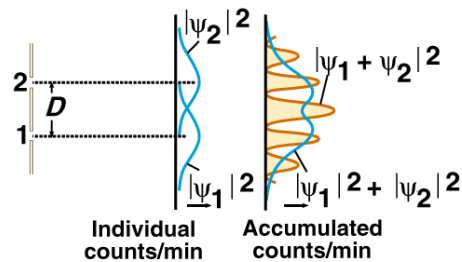


a, b, c - symulacje komputerowe

d - eksperymentalny obraz dyfrakcyjny

Dyfrakcja elektronów

Czy elektron przechodzi równocześnie przez dwie szczeliny ?



Zasada komplementarności

Fotony czy też elektrony oraz obiekty mikroświata w jednych zjawiskach mogą zachowywać się jak fala, a w innych jak cząstka tzn. wykazują zarówno własności falowe jak i korpuskularne. Obie te cechy uzupełniają się wzajemnie, dając pełny opis danego obiektu.

Jaka jest długość fali 50 kg worka poruszającego się z prędkością 100 m/s?

$$\lambda = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{50 \cdot 100 \text{ kgm/s}} \approx 1.2 \cdot 10^{-33} \text{ !!}$$

Długość fali elektronu poruszającego się z prędkością 100 m/s

$$v \approx 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Funkcja falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a, cząstki takie jak elektron czy proton, mają własności falowe.

Własności falowe cząstki (lub innego obiektu) w mechanice kwantowej opisuje tzw. **funkcja falowa** $\Psi(x,t)$:

- zawiera w sobie wszystkie informacje o obiekcie (np. cząstce)
- w ogólnym przypadku jest to funkcja zespolona współrzędnych przestrzennych oraz czasu
- musi być funkcją ciągłą, a także musi mieć ciągłą pochodną
- Kwadrat modułu funkcji falowej

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

jest **gęstością prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w chwili t w pewnym punkcie przestrzeni

$$p = |\Psi|^2 \Delta V \Rightarrow \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

Równanie Schroedingera

Funkcję falową, Ψ dla danej cząstki, lub bardziej złożonego układu fizycznego, otrzymujemy rozwiązując równanie różniczkowe nazywane równaniem Schroedingera. Jeżeli energia potencjalna cząstki U nie zależy od czasu, to równanie Schroedingera jest równaniem niezależnym od czasu i nazywa się **stacjonarnym równaniem Schroedingera**.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + U(x) \Psi(x) = E \Psi(x)$$

Cząstka swobodna

Cząstka swobodna - na cząstkę nie działają żadne pola.
Energia potencjalna cząstki $U(x)=0$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi(x)$$

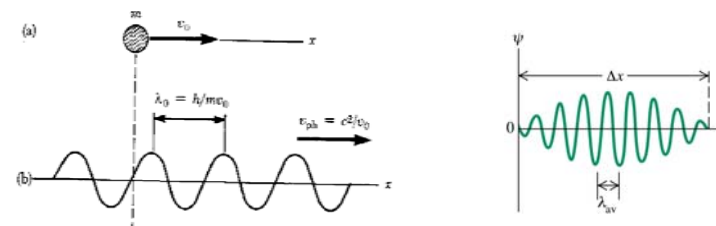
Szukamy rozwiązania w postaci $\Psi(x)=A \sin(kx)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} A(-k^2 \sin(kx)) = EA \sin(kx)$$

Funkcja ta będzie rozwiązaniem gdy:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Cząstka swobodna - paczka falowa



$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} d\lambda$$



Zasada nieoznaczoności

- Fizyka klasyczna
 - dokładność pomiaru jest zdeterminowana jedynie jakością aparatury pomiarowej
 - Nie ma teoretycznych ograniczeń na dokładność z jaką mogą być wykonane pomiary
- Mechanika kwantowa
 - Obowiązuje **zasada nieoznaczoności**: pewnych wielkości fizycznych nie można zmierzyć równocześnie z dowolną dokładnością

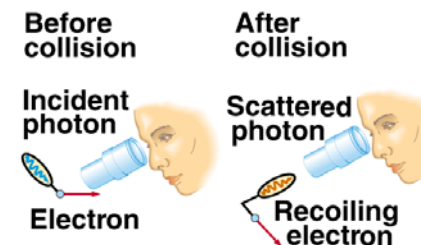
Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru pędu i położenia:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

Przykład. Pęd poruszającego się z prędkością $v=5000\text{m/s}$ elektronu zmierzono z dokładnością $\pm 0.003\%$. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć położenie tego elektronu?

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 3.84 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Zasada nieoznaczoności - interpretacja

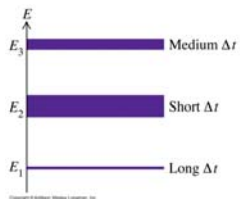


Proces pomiaru zaburza stan układu

Zasada nieoznaczoności energii

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:

$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar / 2$$

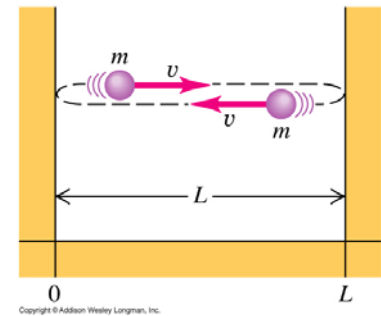


Przykład: Czas przebywania atomu sodu w stanie wzbudzonym zmierzono z dokładnością $\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-8}$ s. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć wartość energii tego stanu?

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

Cząstka w studni potencjału

1. Przypadek klasyczny

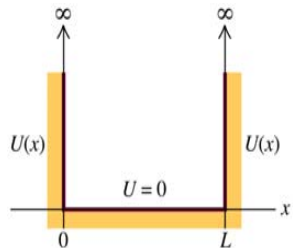


Znajdująca się w głębokiej studni piłka może posiadać **dowolną** energię kinetyczną.

W szczególnym przypadku gdy znajduje się w spoczynku na dnie studni posiada energię całkowitą równą **zeru**.

Cząstka w studni potencjału

2. Przypadek kwantowy



Energia potencjalna

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \\ 0 & \text{dla } x \in (0, L) \end{cases}$$

Warunki brzegowe: $|\Psi(0)|^2 = |\Psi(L)|^2 = 0$

Równanie Schroedingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = E \Psi$$

Cząstka w studni potencjału

W obszarze studni $x \in (0, L)$ cząstka jest cząstką swobodną. Szukamy więc rozwiązania w postaci $\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$.

Warunku brzegowy dla $x=0$: $|\Psi(0)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot 0 + \alpha)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy $\alpha=0$.

Warunku brzegowy dla $x=L$: $|\Psi(L)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot L)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy $kL = n\pi$.

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{oraz} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{skąd} \quad E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Pytanie: czy n może być równe zero?

Dla $n=0$ energia $k=0$ oraz $\Psi(x)=A \sin(0 \cdot x)=0$.
Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym obszarze $|\Psi(x)|^2 \Delta x = 0$

Wniosek: najmniejsza wartość $n=1$. Cząstka musi mieć energię różną od zera. Najmniejsza energia:

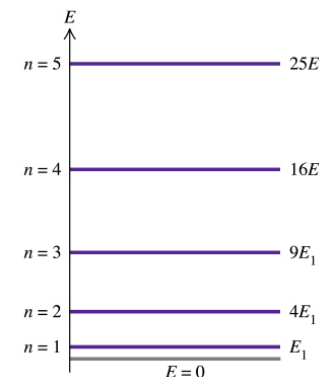
$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} 1^2$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

W nieskończonej studni potencjału energia cząstki może przyjmować tylko pewne ściśle określone, różne od zera wartości:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

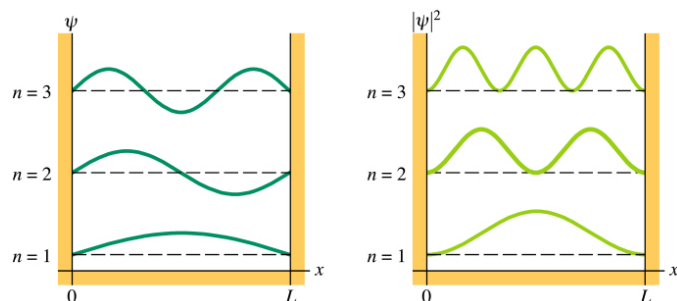
gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$



Cząstka w studni potencjału -wnioski

Funkcja falowa : $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.



Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 1

Pyłec o masie 1 g w studni o szerokości 1 cm

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 5.49 \cdot 10^{-58} \text{ J} = 3.43 \cdot 10^{-39} \text{ eV}$$

b) nr poziomu gdy porusza się z prędkością 3cm/s

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_n = n^2 E_1 \Rightarrow n = \sqrt{E_n / E_1} = 9.05 \cdot 10^{23}$$

$$E_{n+1} - E_n = (2n+1)E_1 \approx 6.2 \cdot 10^{-15} \text{ eV}$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 2

Elektron o masie 9.11×10^{-31} g w studni o szerokości 0.2 nm.

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot (9.11 \cdot 10^{-34} \text{ kg}) \cdot (2 \cdot 10^{-10} \text{ m})} = 1.51 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 9.42 \text{ eV}$$

b) poziomy drugi i trzeci

$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 37.7 \text{ eV}$$

$$E_3 = 9E_1 = 84.8 \text{ eV}$$

$$E_2 - E_1 = 28.28 \text{ eV}$$

Kwantowanie energii

- Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych
- Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami*
- W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała