

Politechnika Wrocławska  
Wydział Elektroniki i telekomunikacji  
Elektroniczne i komputerowe systemy automatyki

Metody Probabilistyczne w Systemach Automatyki

# Rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów

Piotr Komoniewski  
Karol Kozłowski

Prowadzący: Prof. dr hab. inż. Zygmunt Hasiewicz

Wrocław 10.01.2008

---

# Spis treści

---



## Rozdział 1

---

# Założenia projektowe

---

### 1.1 Wytyczne zadania projektowego

1. Zaprojektować i zrealizować pakiet oprogramowania do symulacyjnego badania Rekurencyjnej Metody Najmniejszych Kwadratów identyfikacji liniowego obiektu statycznego

$$y = x^T a + z$$

gdzie:  $x \in R^d$  - wektor losowych wejść obiektu,  $y, z \in R$  - losowe wyjście oraz losowe zakłócenie,  $a \in R^d$  - wektor nieznanych parametrów obiektu

Projekt powinien zapewniać:

1. powtarzalność *RMNK* w tych samych warunkach,
2. wizualizację uśrednionego empirycznego błędu identyfikacji,
3. uzyskanie podstawowych charakterystyk statystycznych błędu identyfikacji (empirycznej wartości średniej i empirycznej wariancji błędu).

### 1.2 Wytyczne zadania badawczego

Przeprowadzić empiryczne badania *RMNK* za pomocą opracowanego oprogramowania dla:

1. różnych rodzajów i parametrów losowych pobudzeń  $x$ ,
2. różnych rodzajów i parametrów losowych zakłóceń  $z$ ,
3. różnych warunków początkowych *RMNK*,
4. różnych wymiarów  $d$  wektora wejść i nieznanych parametrów obiektu.



## Rozdział 2

---

# Wstęp teoretyczny do zadania projektowego

---

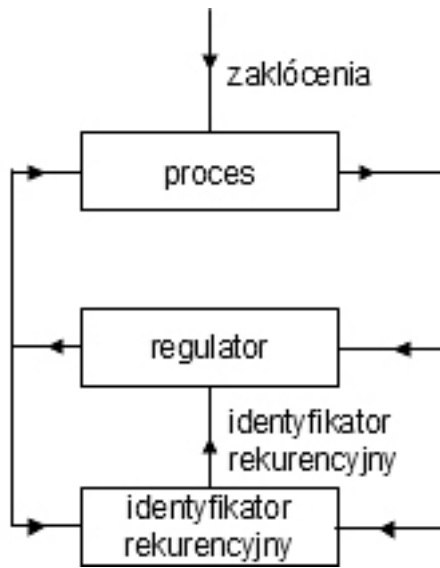
Metoda najmniejszych kwadratów została niezależnie podana przez A.M. Legendre w 1806 r. oraz przez K.F. Gaussa w 1809 r. Metoda ta została sformułowana jako sposób wyznaczania orbit planet i komet na podstawie obserwacji astronomicznych.

W rekurencyjnych metodach identyfikacji (zwanymi również metodami *on-line*) estymacja parametrów następuje rekurencyjnie w czasie, tzn. jeśli jest znany estymator  $\hat{\theta}(t-1)$ , wyznaczony w chwili  $t-1$  włącznie, to  $\hat{\theta}(t)$  jest obliczone przez "prostą modyfikację"  $\hat{\theta}(t-1)$ . Przeciwnieństwem tych metod są metody wsadowe (*off-line*), w których wszystkie zapisane dane są używane jednocześnie do wyznaczenia estymatora.

Rekurencyjne metody identyfikacji mają następujące cechy ogólne:

- odgrywają kluczową rolę w systemach adaptacyjnych (stosowanych przykładowo w sterowaniu i przetwarzaniu sygnałów), gdzie działanie (sterowaniem filtracją itp.) jest podejmowane na podstawie najbardziej aktualnego modelu,
- nie potrzebują dużej pamięci, gdyż nie wymagają gromadzenia wszystkich danych doświadczalnych,
- mogą być łatwo dostosowane do algorytmów działających w czasie rzeczywistym, używanych do śledzenia zmieniających się w czasie parametrów,
- mogą być stosowane jako pierwszy krok w algorytmach wykrywania uszkodzeń oraz do badania, czy w systemie zaszły istotne zmiany.

W większości systemów adaptacyjnych, na przykład adaptacyjnych systemach sterujących (patrz ??), używa się identyfikacji rekurencyjnej. w takim przypadku wyz-



Rysunek 2.1: Ogólny schemat adaptacyjnego układu regulacji

naczamy na bieżąco model procesu jest znany w każdej chwili i może zostać użyty do wyznaczenia parametrów regulatora. W ten sposób regulator zależy od wcześniejszego zachowania się procesy. Jeśli regulator był skonstruowany poprawnie, to powinien dostosować się do zmiennych właściwości procesu.

Metodę najmniejszych kwadratów wykorzystuje się, między innymi, do wyznaczania parametrów obiektu liniowego. Przyjmujemy, że obiekt jest opisany następującym równaniem macierzowym.

$$y = Xa + z \quad (2.1)$$

gdzie  $X$  jest wektorem wejściowym. Zakłada się również, że zakłócenia  $z$  są wektorem zmiennych losowych o wektorze wartości oczekiwanych

$$E(z) = 0 \quad (2.2)$$

oraz macierzy kowariancji

$$\text{cov}(z) = E[z - E(z)][z - E(z)]^T = E(zz^T) = I\sigma^2 \quad (2.3)$$

Wynika stąd, że zakłócenia są wektorem zmiennych losowych stochastycznie niezależnych o stałej wariancji  $\sigma^2$ . Wielkość wyjściowa obiektu  $y$  jest wektorem zmiennych losowych o wartości oczekiwanej

$$E(y) = E(Xa + z) = Xa + E(z) = Xa \quad (2.4)$$

oraz macierzy kowariancji

$$\text{cov}(y) = E[y - E(y)][y - E(y)]^T = E[Xa + z - Xa][Xa + z - Xa]^T = E(zz^T) = I\sigma^2 \quad (2.5)$$

Współczynniki  $a^*$  modelu  $y = Xa^*$  aproksymującego obiekt o parametrach  $a$  traktuje się jako zmienne losowe stanowiące estymatory wartości prawdziwych parametrów obiektu. Otrzymujemy je na podstawie metody najmniejszej sumy kwadratów. Estymator parametrów określa się wzorem:

$$a^* = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (2.6)$$

i jest on liniowo zależny od wyjść obiektu  $y$  oraz ma wartość oczekiwaną w postaci:

$$E(a^*) = E[(X^T X)^{-1} X^T y] = (X^T X)^{-1} X^T E(y) = X^T X^{-1} X^T X a = a \quad (2.7)$$

Można to rozwinąć do zapisu,  $E(a_k^*) = a_k, k = 0, 1, 2, \dots, K$  co oznacza, że wartość oczekiwana estymatora parametru jest równa wartości prawdziwej parametru. Stąd wynika, że estymator  $a^*$  jest estymatorem nieobciążonym.

W wielu przypadkach np. w regulatorach adaptacyjnych pomiary wartości  $y_n$  są wykonywane sekwencyjnie w trybie online. Estymaty są wtedy obliczane dla różnych chwil  $n - 1 \dots N$  i obliczenia powinny być zorganizowane w ten sposób aby obliczenia wykonane dla  $n - 1$  pomiarów mogły być wykorzystane do wyznaczenia estymaty dla  $n$  pomiarów.

Wyprowadzenie równania rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów:  
wersja off-line (standardowa)

$$a_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N \quad (2.8)$$

wersja on-line (rekurencyjna)

$$a_N = f(a_{N-1}, x_N, y_N) = a_{N-1} + \delta(a_{N-1}, x_N, y_N) \quad (2.9)$$

odwracana macierz (w wersji off-line)

$$X_N^T X_N = \sum_{k=1}^N x_k x_k^T = \sum_{k=1}^{N-1} x_k x_k^T + x_N x_N^T = X_{N-1}^T X_{N-1} + x_N x_N^T \quad (2.10)$$

oznaczmy

$$P_N = (X_N^T X_N)^{-1} \quad (2.11)$$

$$\text{cov}(a_N) = P_N \sigma_z^2 \quad (2.12)$$

możemy zapisać

$$a_N = P_N X_N^T Y_N \quad (2.13)$$

$$a_{N-1} = P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} \quad (2.14)$$

$$P_N = (P_{N-1}^{-1} + x_N x_N^T)^{-1}, \text{ gdzie } P_{N-1}^{-1} = X_{N-1}^T X_{N-1} \quad (2.15)$$

**Lemat 1** (o odwracaniu macierzy)

$$(A + uu^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + u^T A^{-1} u} A^{-1} u u^T A^{-1} \quad (2.16)$$

Przyjmując  $A = P_{N-1}^{-1}$  i  $u = x_N$  otrzymujemy

$$P_N = P_{N-1} \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N} P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} = P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} \quad (2.17)$$

$$\text{gdzie } \varkappa_N = \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N}$$

$$a_N = (P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1})(X_{N-1}^T Y_{N-1} + x_N y_N) = P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} + P_{N-1} x_N y_N - [\varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T (X_{N-1}^T Y_{N-1} + x_N y_N)] \quad (2.18)$$

wstawiając

$$\frac{1}{\varkappa_N} = 1 + x_N^T P_{N-1} x_N \quad (2.19)$$

otrzymujemy

$$\dots = y_N + x_N^T P_{N-1} x_N y_N - x_N^T a_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N = y_N - x_N^T a_{N-1} \quad (2.20)$$

wniosek

$$a_N = a_{N-1} + \varkappa_N P_{N-1} x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \quad (2.21)$$

$$P_N = P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} / \cdot x_N \quad (2.22)$$

$$P_N x_N = P_{N-1} x_N - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} x_N = \varkappa_N P_{N-1} x_N \frac{1}{\varkappa_N} - x_N^T P_{N-1} x_N \quad (2.23)$$

$$\dots = 1$$

$$P_N x_N = \varkappa_N P_{N-1} x_N \quad (2.24)$$

wstawiając do (??)

$$a_N = a_{N-1} + P_N x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \quad (2.25)$$

$$P_N = P_{N-1} - \frac{P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N} \quad (2.26)$$

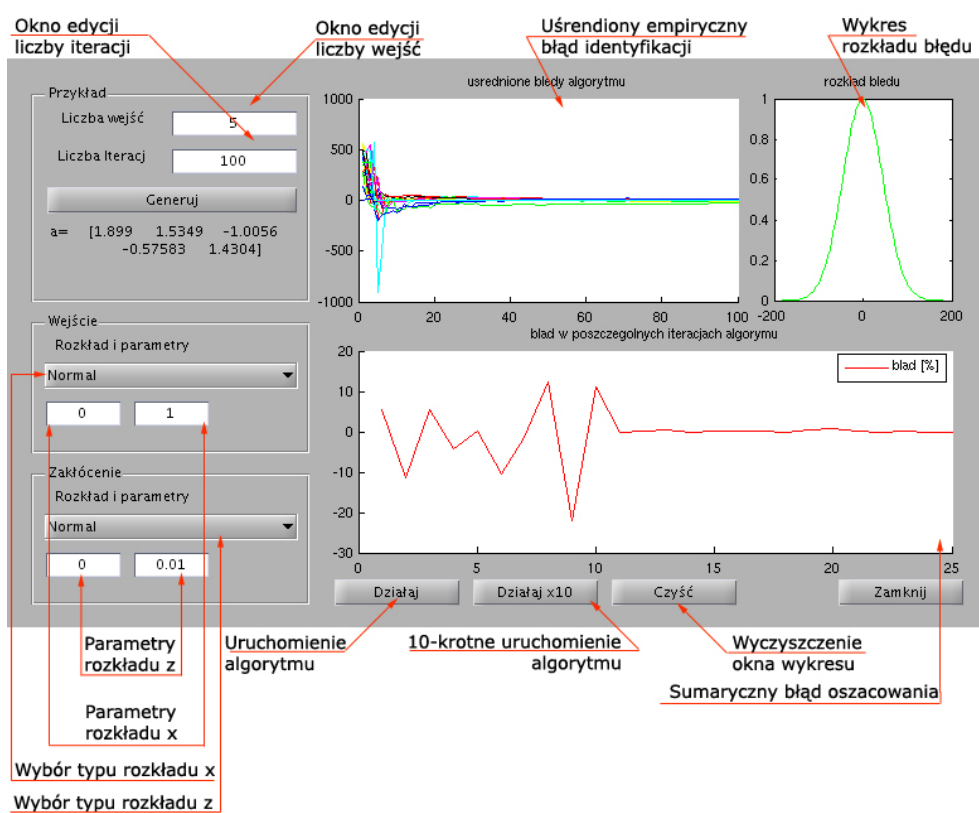
założone warunki początkowe  $a_0 = 0$ ,  $P_0 = \text{diag}[10^3 \div 10^5]$

## Rozdział 3

---

# Interfejs graficzny programu

---



Rysunek 3.1: Interfejs graficzny programu

## Rozdział 4

---

# Badania RMNK

---

Wszystkie badania wykonane zostały z serii 25 uśrednionych uruchomień algorytmu.

### 4.1 Wpływ zmiany parametrów pobudzeń $x$ na błąd identyfikacji obiektu dla rozkładu jednostajnego

Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-j, j)$  ; gdzie  $j = 0.01 \dots 0.5$  o rozkładzie jednorodnym;

Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(0, 0.01)$  o rozkładzie normalnym.

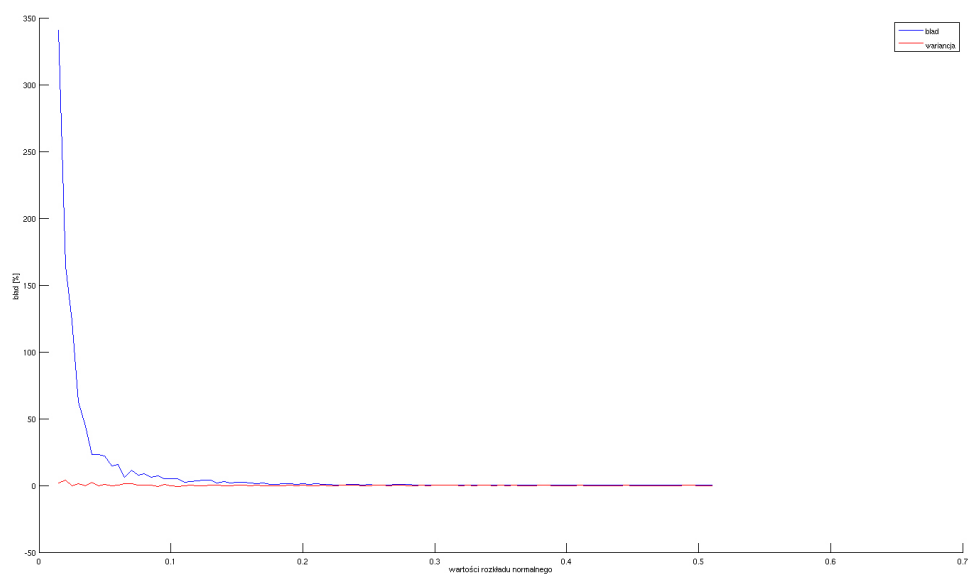
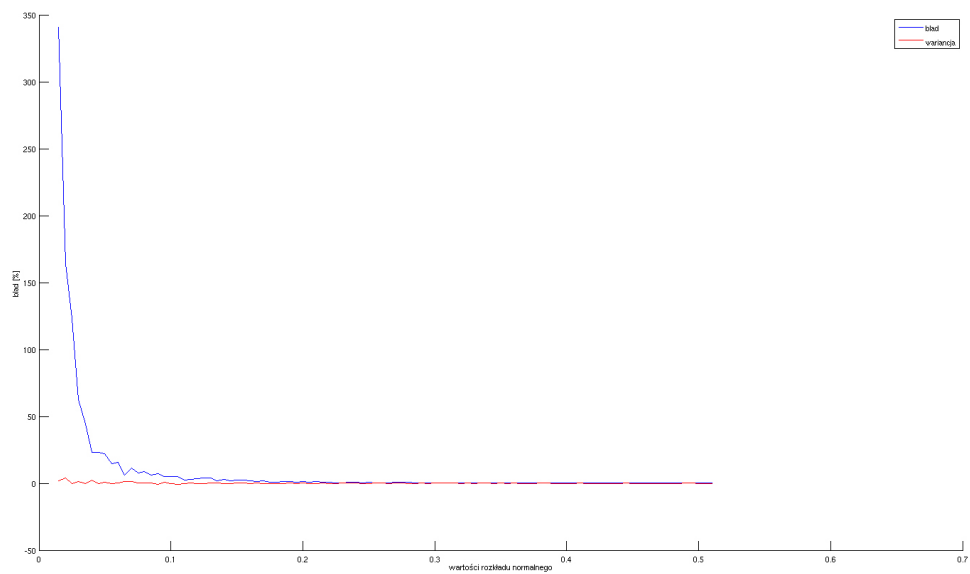
Badania przedstawiono na rysunku ??.

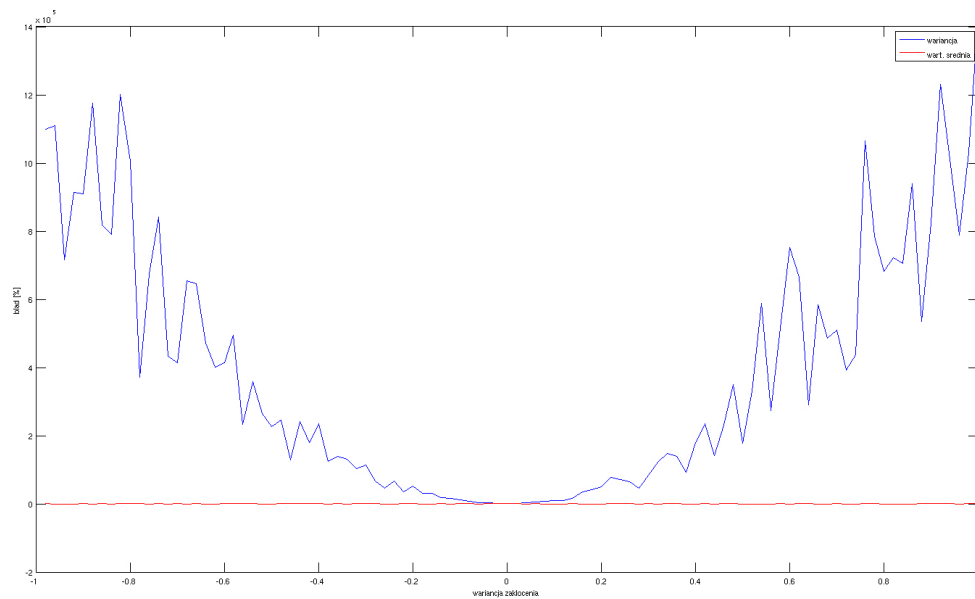
#### 4.1.1 Wpływ wzrostu wartości średniej rozkładu $x$ na błąd identyfikacji obiektu dla rozkładu jednostajnego

Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-1, 1 + j)$  ; gdzie  $j = 0 \dots 10$  o rozkładzie jednorodnym;

Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(0, 0.01)$  o rozkładzie normalnym.

Badania przedstawiono na rysunku ??.

Rysunek 4.1: Badania wpływu zmiany parametrów rozkładu pobudzenia  $x$ Rysunek 4.2: Badania wpływu wzrostu wartości średniej rozkładu pobudzenia  $x$



Rysunek 4.3: Badania wpływu zmiany wartości oczekiwanej rozkładu zakłócenia  $z$

## 4.2 Wpływ zmiany parametrów rozkładu zakłócenia $z$ na błąd identyfikacji obiektu dla rozkładu jednostajnego

### 4.2.1 Wpływ wartości oczekiwanej rozkładu zakłócenia na efektywność metody

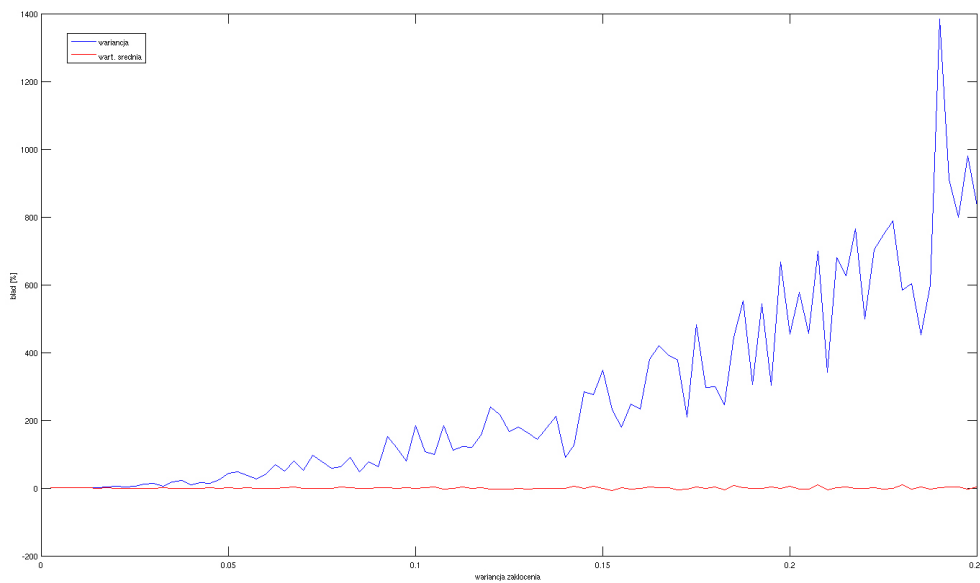
Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-1, 1)$  o rozkładzie jednorodnym;  
 Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(j, 0.01)$ ; gdzie  $j = -1 \dots 1$  o rozkładzie normalnym.

Badania przedstawiono na rysunku ??.

### 4.2.2 Wpływ wariancji rozkładu zakłócenia na efektywność metody

Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-1, 1)$  o rozkładzie jednorodnym  
 Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(0, j)$ ; gdzie  $j = 0.01 \dots 1$  o rozkładzie normalnym.

Badania przedstawiono na rysunku ??



Rysunek 4.4: Badania wpływu zmiany wariancji rozkładu zakłóceń  $z$

### 4.3 Wpływ liczby iteracji na błąd identyfikacji obiektu dla stałych rozkładów $x$ i $z$

Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-1, 1)$  o rozkładzie jednorodnym;

Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(0, 0.1)$  o rozkładzie normalnym;

Stała liczba wejść  $S = 7$  oraz zmienna liczba iteracji  $N = 1 \dots 50$ .

Badania przestawiono na rysunku ??.

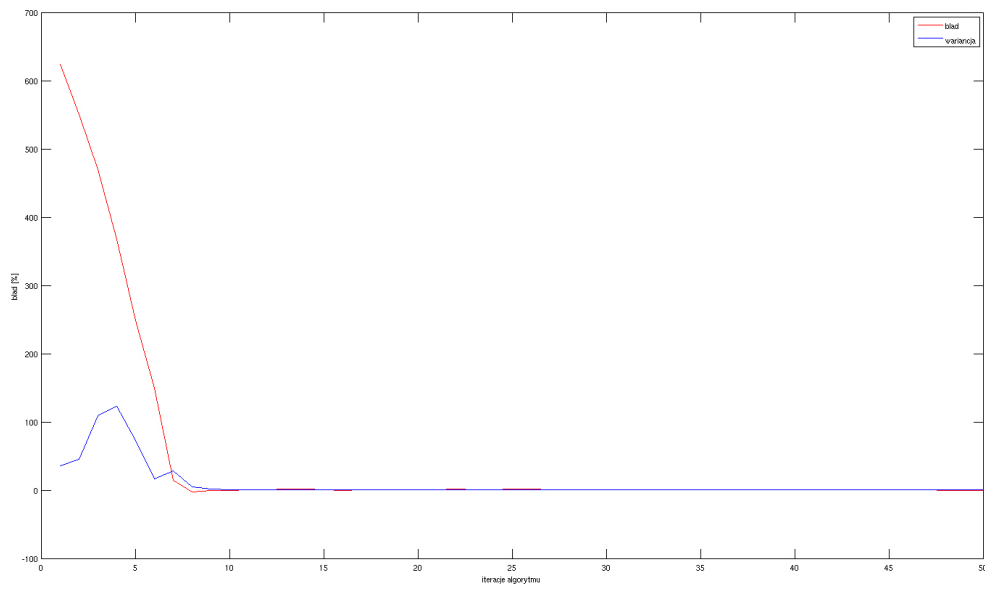
### 4.4 Wpływ liczby wejść na błąd identyfikacji obiektu dla stałych rozkładów $x$ i $z$

Parametry rozkładu zmiennej wejściowej  $x = U(-1, 1)$  o rozkładzie jednorodnym;

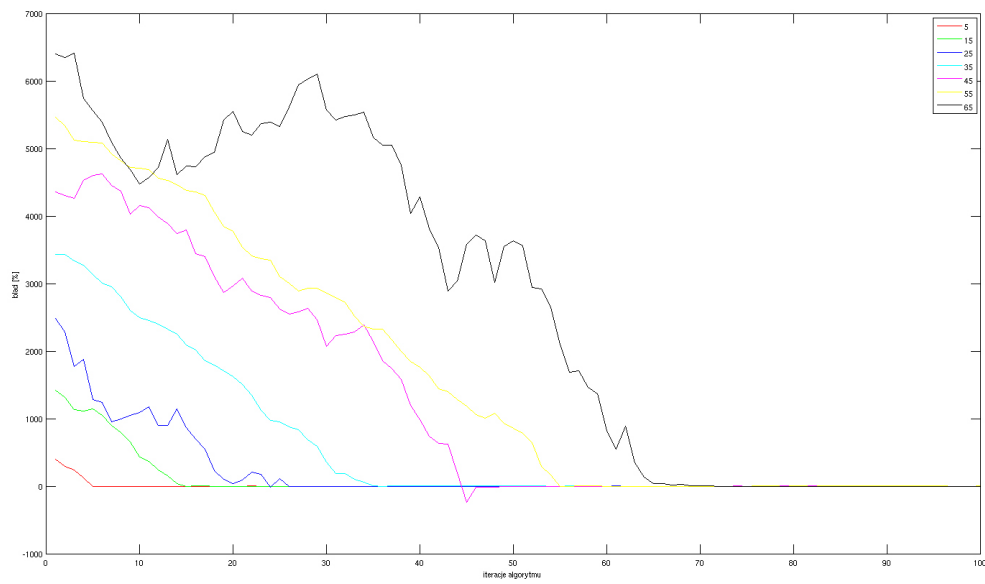
Parametry rozkładu zmiennej zakłóceń  $z = N(0, 0.01)$  o rozkładzie normalnym;

Zmienna liczba wejść  $S = 1 \dots 100$  oraz stała liczba iteracji  $N = 75$ .

Badania przestawiono na rysunku ??.



Rysunek 4.5: Badania wpływu liczby iteracji na błąd identyfikacji obiektu



Rysunek 4.6: Badania wpływu liczby wejść na błąd identyfikacji obiektu



## Rozdział 5

---

## Wnioski

---



---

## Spis symboli i skrótów

---

	Abbreviation	Description	Definition
RMNK		Rekurencyjna Metoda Najmniejszych Kwadratów	page ??

---

## Spis rysunków

---

---

## Spis tablic

---