

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT)

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi właściwościami dyskretnego przekształcenia Fouriera. Badanie odwrotnego dyskretnego przekształcenia Fouriera. Porównanie wydajności obliczeniowej szybkiego przekształcenia Fouriera i dyskretnego przekształcenia Fouriera obliczanego z definicji. Badanie próbkowania widma ciągłego i analiza zjawiska przecieku widma. Badanie właściwości części rzeczywistej i urojonej widma, oraz realizacja operacji rozwijania fazy.

1. Podstawy obliczania DFT

Dyskretnie przekształcenie Fouriera jest procedurą matematyczną używaną do wyznaczenia zawartości harmonicznego lub częstotliwościowego sygnału dyskretnego. DFT pochodzi od ciągłego przekształcenia Fouriera:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

gdzie $x(t)$ jest pewnym sygnałem ciągłym w dziedzinie czasu.

DFT zdefiniowany jest jako dyskretny ciąg $X(m)$ w dziedzinie częstotliwości:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi mn/N}$$

gdzie $x(n)$ jest dyskretnym ciągiem próbkowanych wartości w dziedzinie czasu ciągłej funkcji $x(t)$.

Równanie DFT można przekształcić z zależności Eulera $e^{j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$ na równoważne:

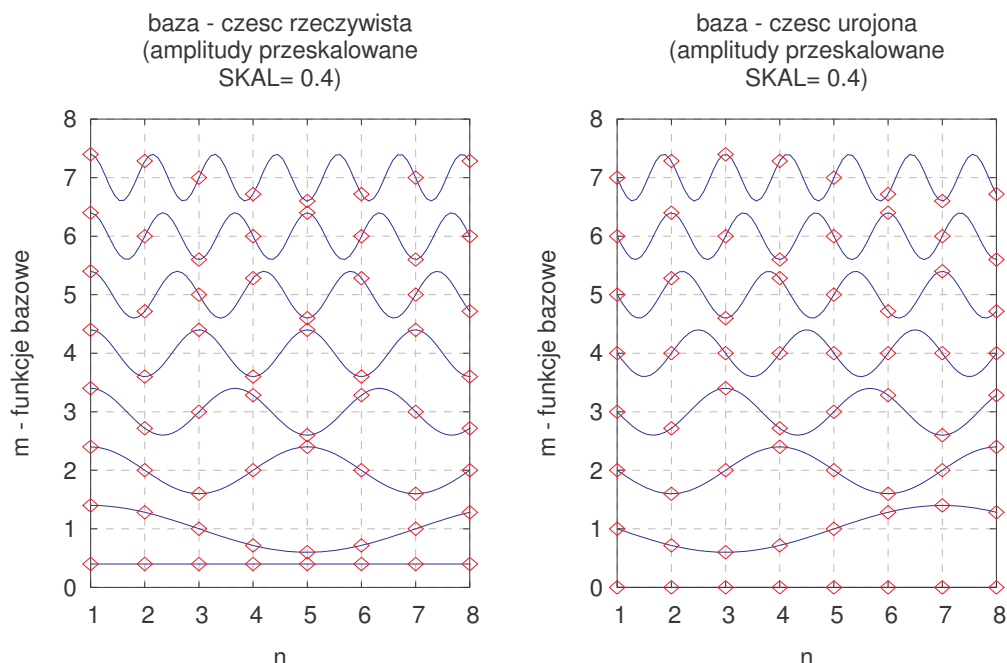
$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j\sin(2\pi mn/N)]$$

Z powyższego wzoru wynika, że każdy człon wyjściowy $X(m)$ DFT stanowi sumę punkt po punkcie iloczynu ciągu wartości wejściowego sygnału i przebiegu zespolonego postaci $\cos(\theta) - j\sin(\theta)$.

Dokładne wartości częstotliwości różnych przebiegów sinusoidalnych zależą zarówno od szybkości próbkowania f_s , z jaką był próbkowany sygnał oryginalny, jak też od liczby próbek N . Wartości częstotliwości N kolejnych punktów na osi częstotliwości, w których są wyznaczane prążki DFT, są określane jako

$$f_{\text{analysis}}(m) = \frac{mf_s}{N}$$

a) Przykładowe sygnały bazowe dyskretnego przekształcenia Fouriera.



b) Porównanie czasu obliczania DFT z definicji z czasem obliczania FFT

Długość sygnału x [N]	Średni czas obliczania DFT [s]	Średni czas obliczania FFT [s]
8	0.125999	0.000000
16	0.001999	0.001000
32	0.003000	0.001001
64	0.004000	0.001000
128	0.007000	0.001000
256	0.027001	0.000999

Powyższa tabela powstała na podstawie skryptu `porownanie.m`, który porównuje czas wykonania obliczeń DFT z FFT. Z analizy różnic w czasie obliczeń wynika, że FFT jest o wiele szybszy - czas wykonania tej operacji nie rośnie tak bardzo wraz ze wzrostem długości sygnału badanego jak w przypadku DFT.

Skrypt **porownanie.m**.

`%Porównuje DFT z FFT`

`% parametry`

`N = 256;` `% dlugosc sygnału w próbkach`

`f = [1000, 2000];` `% czestotliwosci sygnałów składowych`

`ph = [0, (3/4)*pi];` `% przesunięcia fazowe składowych`

`A = [1, 0.5];` `% amplitudy składowych`

`bias = 0;` `% wartość składowej stałej`

`fs = 8000;` `% czestotliwosc próbkowanie`

`mnoznik = 5;` `% zagęszczenie próbek dla reprezentacji „ciągłej”`

`n = 1:N;` `% indeksy próbek dla sygnałów bazowych`

```

% indeksy dla reprezentacji „ciaglych”
nContSize = mnoznik*N;

% indeksy próbek
nSamp = 1:N;
nCont = linspace(1,N,nContSize);      % indeksy dla probek cyfrowych
                                         % indeksy dla „ciaglych” wersji sygnalow

% synteza sygnalu
freqLen = length(f);
x = zeros(1, 1:N);
xCont = zeros(1, 1:N*mnoznik);
for k=1:freqLen
    x = x + A(k)*sin(2*pi*f(k)*(nSamp-1)./fs + ph(k));
    xCont = xCont + A(k)*sin(2*pi*f(k)*(nCont-1)./fs + ph(k));
endfor

% dodanie składowej stałej
x = x + bias;
xCont = xCont + bias;

% inicjalizacja macierzy z wektorami przestrzeni bazowej
mSize = N;
B = zeros(mSize, N);
BCont = zeros(mSize, nContSize);

% Obliczanie bazy
m = 1:N;
B(m,n) = exp(-i*2*pi*(m-1)*(n-1)/N);
for iM= 1:mSize
    for iN = 1:nContSize
        BCont(iM,iN) = exp(-i*2*pi*(m(iM)-1)*(nCont(iN)-1)./N);
    endfor
endfor;

% Porównanie

% Obliczanie DFT
disp("Obliczam DFT z definicji")
X = zeros(1,mSize);
% włączenie "stopera" mierzącego czas wykonania operacji
tic()
for iM = 1:N
    X(iM) = x * (B(iM,:).');
endfor
% zatrzymanie "stopera"
printf("tczas wykonania DFT = %f \n",toc);

% Obliczanie FFT
disp("Obliczam FFT")
Y = zeros(1,mSize);

```

```
% włączenie "stopera" mierzącego czas wykonania operacji
tic()
Y=fft(x,N);
% zatrzymanie "stopera"
printf("\tczas wykonania FFT = %f \n",toc);
```

c) Funkcja m2freq() dokonująca konwersji numerów prążków ($m = 0 \dots N-1$) na częstotliwości analizy.

Prototyp funkcji:

```
function [f] = m2freq(m, fs)
%M2FREQ dokonuje konwersji numerów na częstotliwości analizy
% [f] = m2freq(m, fs)
%
% Wejście:
% m - wektor wierszowy z numerami prążków,
% fs - częstotliwość próbkowania.
%
% Wyjście:
% f - wektor wierszowy z częstotliwościami analizy
% odpowiadającymi poszczególnym numerom prążków.
N=length(m);
f=m*fs/N;
endfunction
```

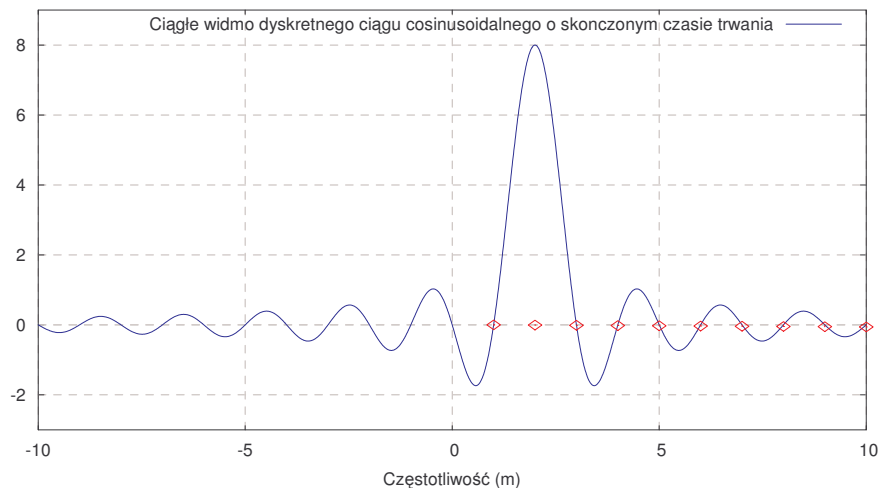
2. Próbkowanie widma ciągłego

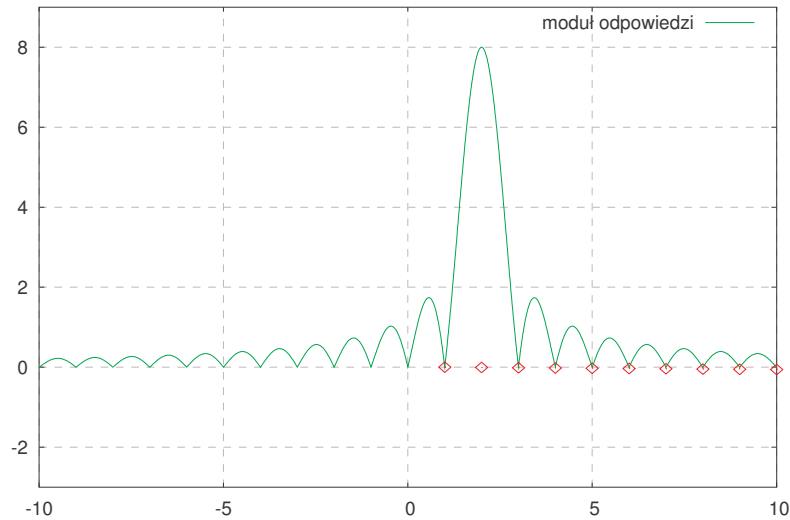
Obserwacja efektu próbkowania widma ciągłego dla przebiegu, który aproksymowany jest przez funkcję:

$$X(m) = \frac{N}{2} \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)}$$

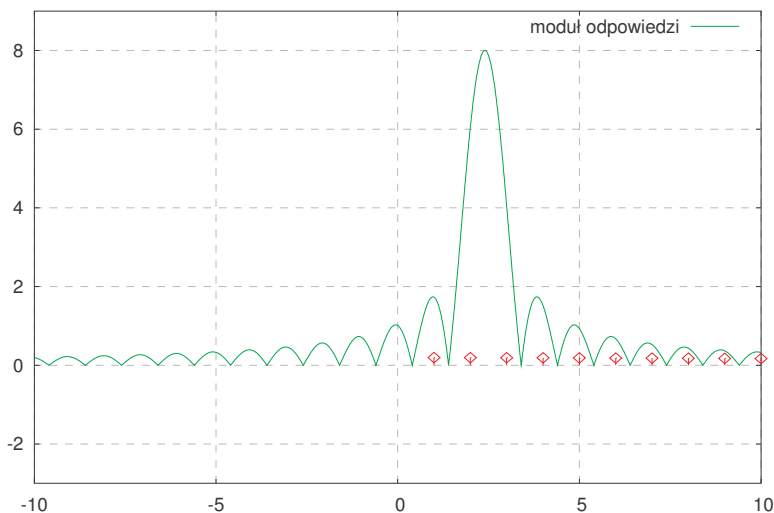
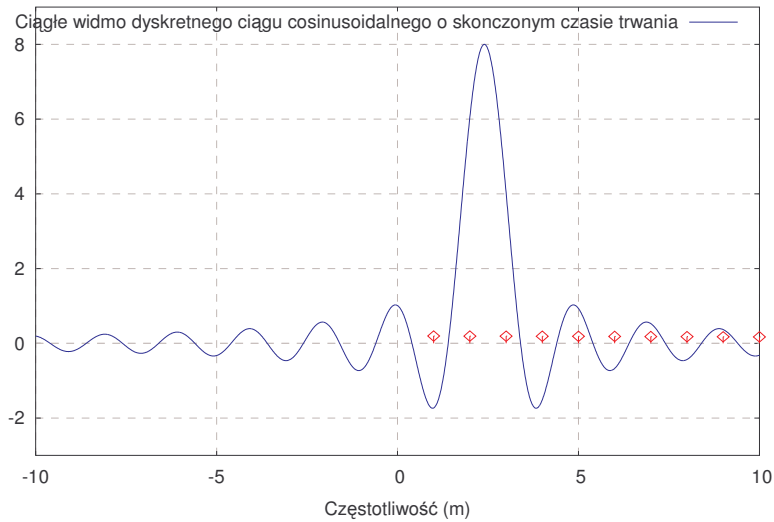
gdzie: m – częstotliwość dyskretna,
 k – liczba okresów sinusoidy w N próbkach.

a) Ciągłe widmo dyskretnego ciągu cosinusoidalnego o skończonym czasie trwania: $N=16$, $k=2$;



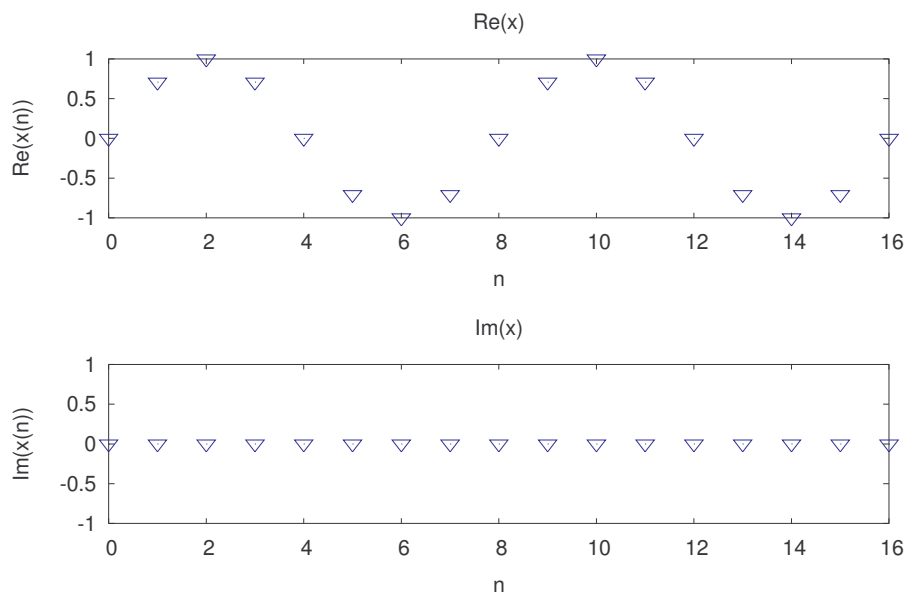


b) Ciągłe widmo dyskretnego ciągu cosinusoidalnego o skończonym czasie trwania: $N=16$, $k=2.4$;

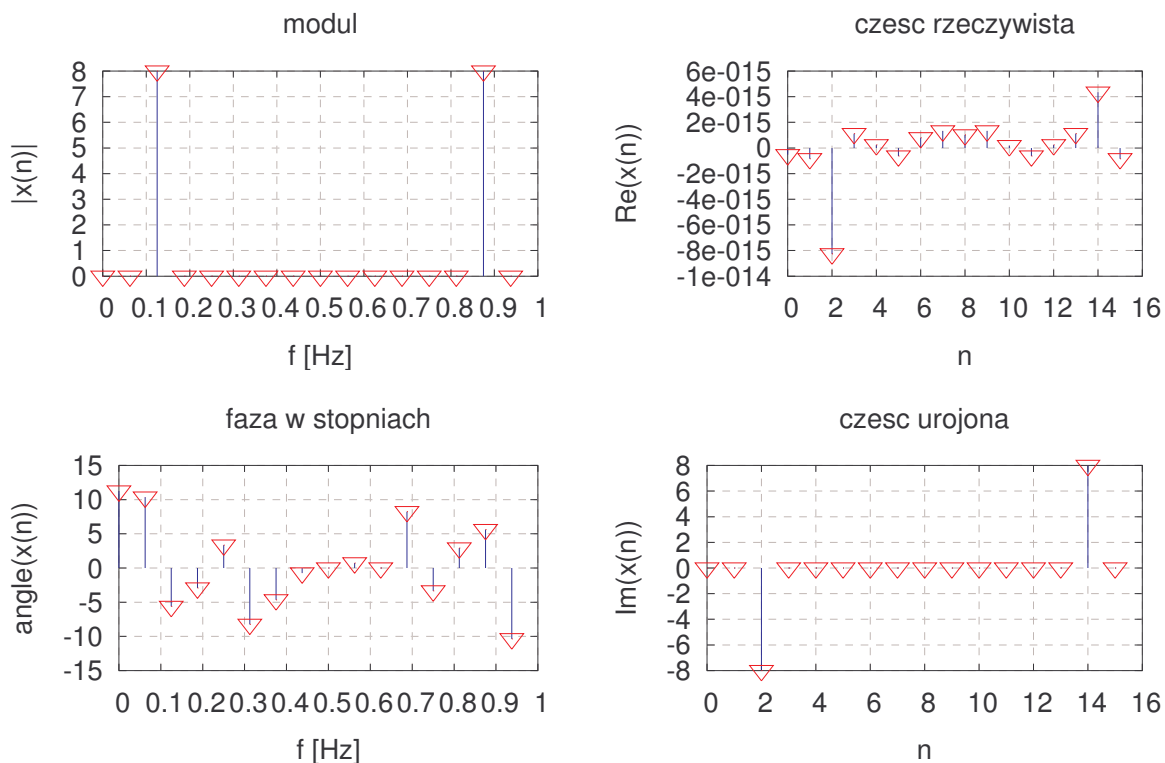


Na powyższe wykresy nałożony jest także na czerwono miejsca w których na osi dodatniej x występują prążki. Z analizy otrzymanych wyników wynika, że w przypadku całkowitej ilości okresów sygnału w próbkach istnieje tylko jeden prążek niezerowy, natomiast w przeciwnym wypadku następuje rozłożenie się tego prążka, czyli przeciek energii do wszystkich innych prążków DFT.

c) DFT $x(n)$ dla $N=16$ i całkowitej liczbie okresów $T=2$ w N próbkach, częstotliwość sygnału wynosi zatem $f_s=2/16=1/8\text{Hz}=0.125\text{Hz}$



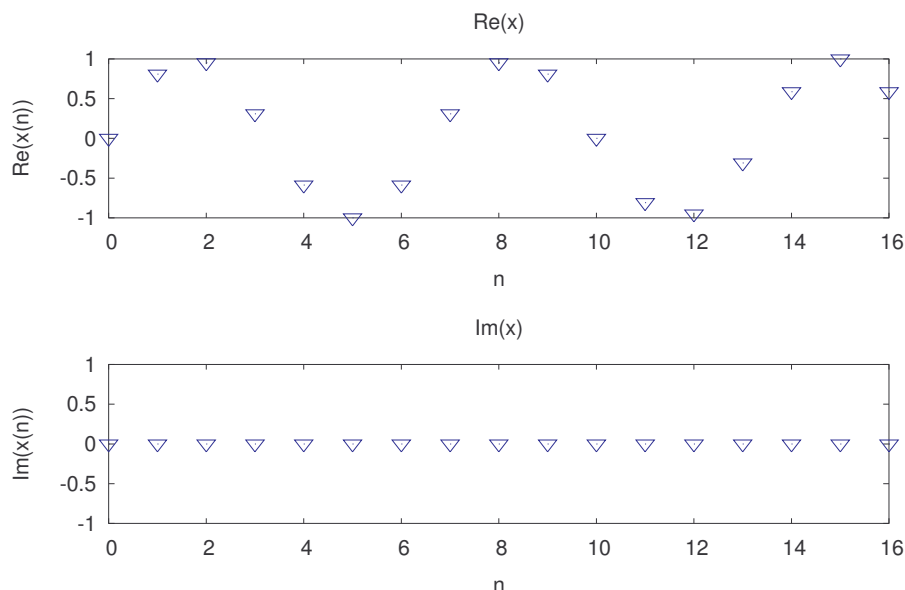
Częstotliwość analizy $f_{\text{analizy}}=1/16\text{Hz}$.



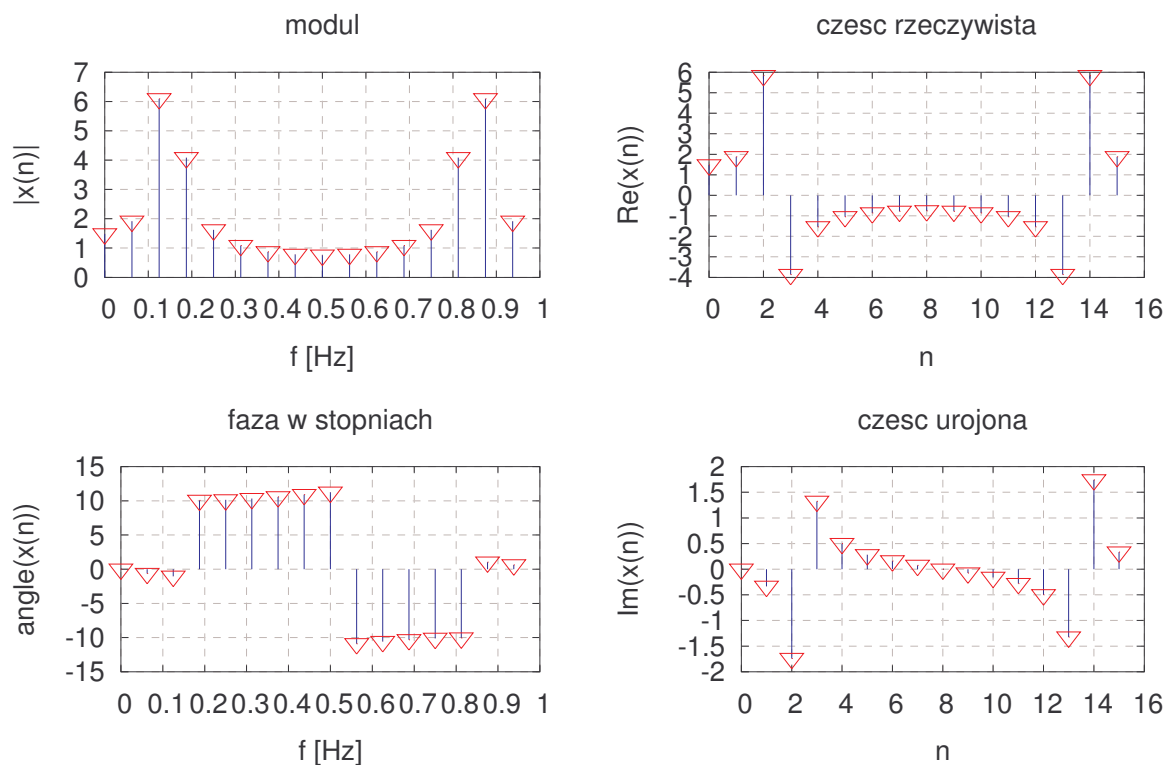
Z analizy powyższych wykresów wynika, że prążki wystąpiły na częstotliwościach 0.125 i 0.875 ponieważ f_{analizy} jest wielokrotnością częstotliwości sygnału i jedną z własności dyskretnej transformaty Fouriera jest symetria.

$$X(m) = X^*(N - m)$$

- d) DFT $x(n)$ dla $N=16$ i niecałkowitej liczbie okresów $T=2.4$ w N próbkach, częstotliwość sygnału wynosi zatem $f_s=2.4/16=0.15\text{Hz}$



Częstotliwość analizy $f_{\text{analizy}}=1/16\text{Hz}$.



Ponieważ analizowany powyżej ciąg wejściowy nie ma całkowitej liczby okresów w przedziale 16 próbek, energia wejściowa przecieka do wszystkich innych prążków DFT.

Przeciek powoduje, że dowolny sygnał wejściowy, którego częstotliwość nie jest dokładnie równa częstotliwości, dla której jest wyznaczany dany prążek DFT, przecieka do wszystkich innych wyznaczanych prążków DFT.

3. Przeciek widma

Wyznaczenie DFT dla przebiegu sinusoidalnego, którego częstotliwość f_{sin} jest różna od częstotliwości analizy DFT f_a , czyli:

$$f_{sin} \neq f_s \frac{m}{N}$$

gdzie:

$m = 0, 1, \dots, N-1$

– częstotliwość dyskretna,

f_s

– częstotliwość próbkowania,

N

– długość transformaty.

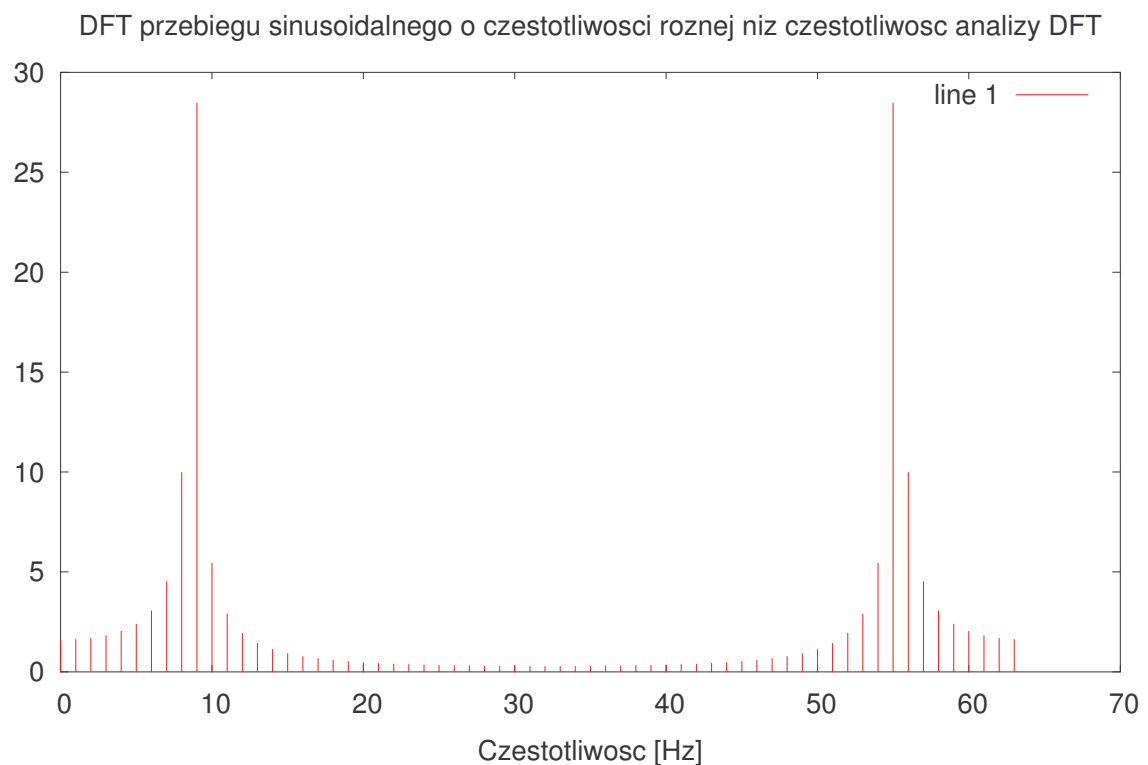
$N=64$;

$f=8.75\text{Hz}$;

$f_p=64\text{Hz}$;

$x(n)=\sin(2*\pi*f*n/f_p)$;

$f_a=f_p/N=1\text{Hz}$;



Na powyższym wykresie przedstawiony jest przeciek widma. Zachodzi on w przypadku kiedy częstotliwość sygnału nie jest całkowitą wielokrotnością częstotliwości analizy DFT.

4. Zwiększenie rozdzielczości DFT

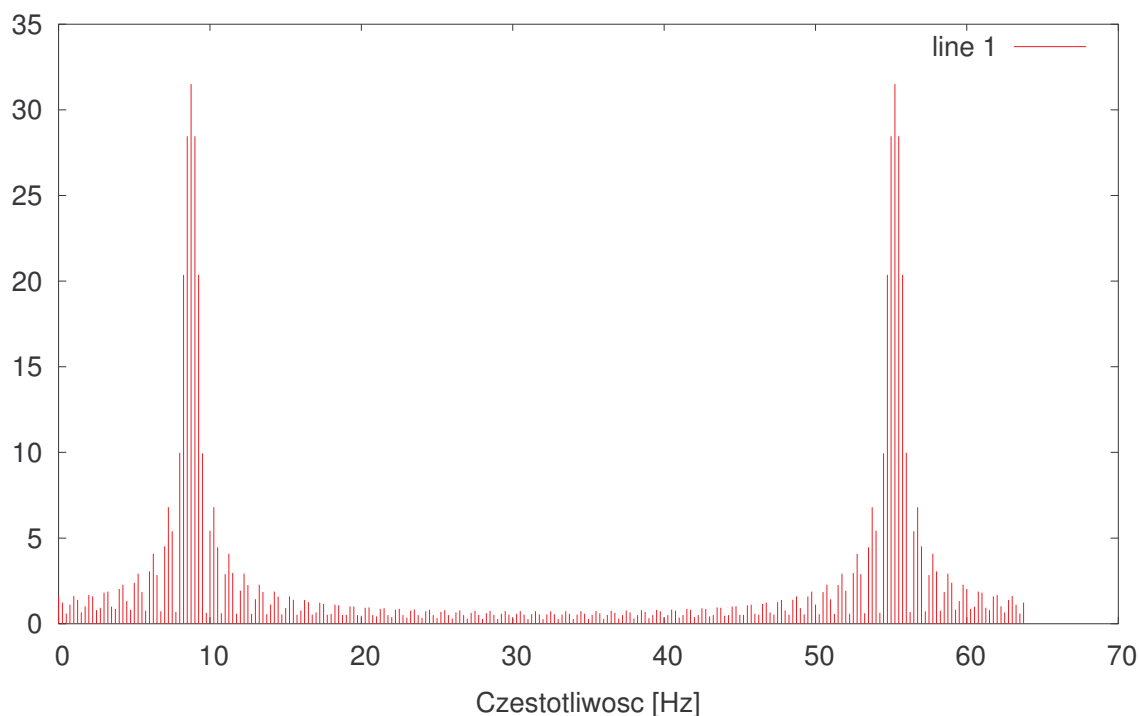
$n=(0:63)$;

$x=\sin(2*\pi*8.75*n/64)$;

Zwiększamy rozdzielczość DFT poprzez dołożenie na końcu badanego sygnału zera, co powoduje zwiększenie długości transformaty i zmniejszenie wartości częstotliwości analizy f_a .

Jeżeli nasza nowa transformata ma długość $N=256$ należy dołożyć 192 zera.

DFT przebiegu sinusoidalnego uzupełnionego zerami do długość 256



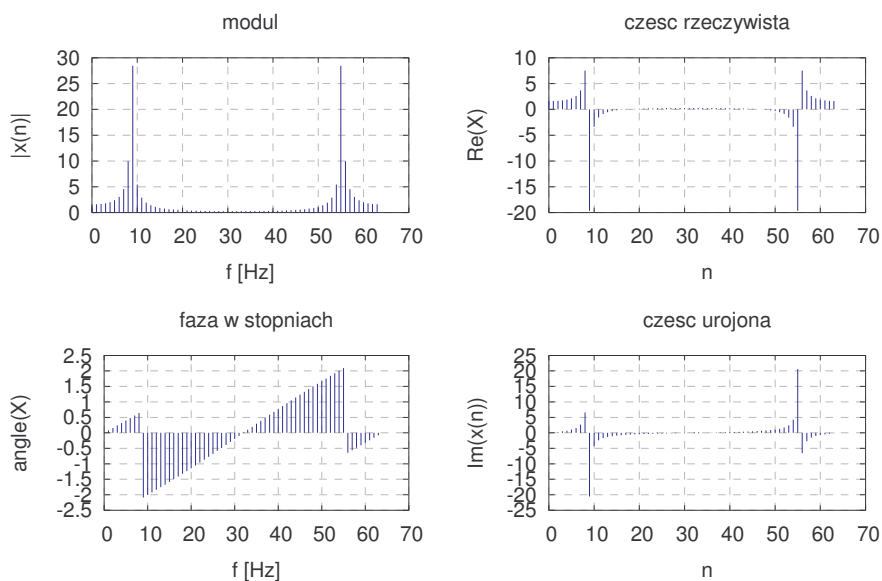
Częstotliwość analizy wynosi $f_{\text{anali}}=64/256=0.25\text{Hz}$.

Z analizy powyższego wykresu wynika, że maksimum jest dla częstotliwości 8.75Hz, czyli częstotliwości sygnału.

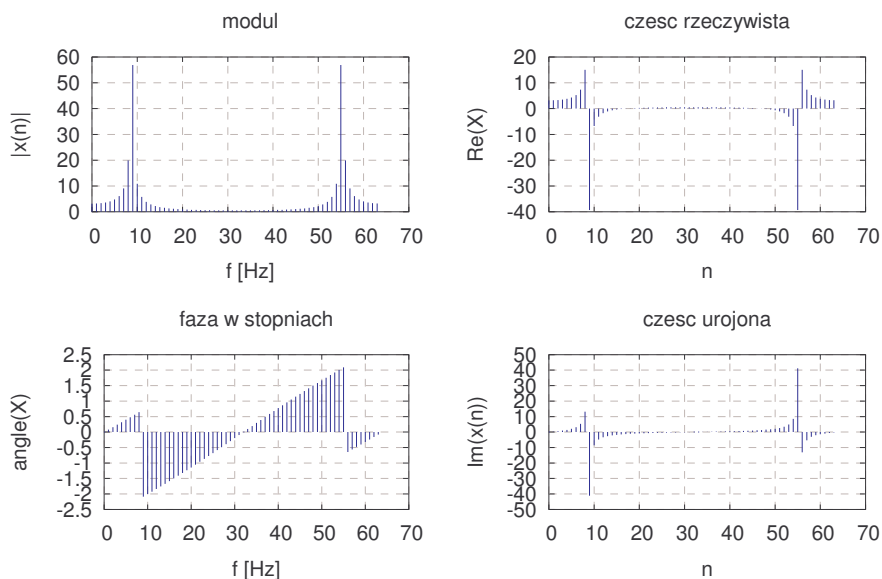
Dodanie do ciągu wejściowego zer poprawi rozdzielczość wyniku DFT, ale istnieje praktyczna granica określająca, jak wiele możemy zyskać przez dodanie większej liczby zer.

5. Zbadanie właściwości części rzeczywistej i urojonej DFT.

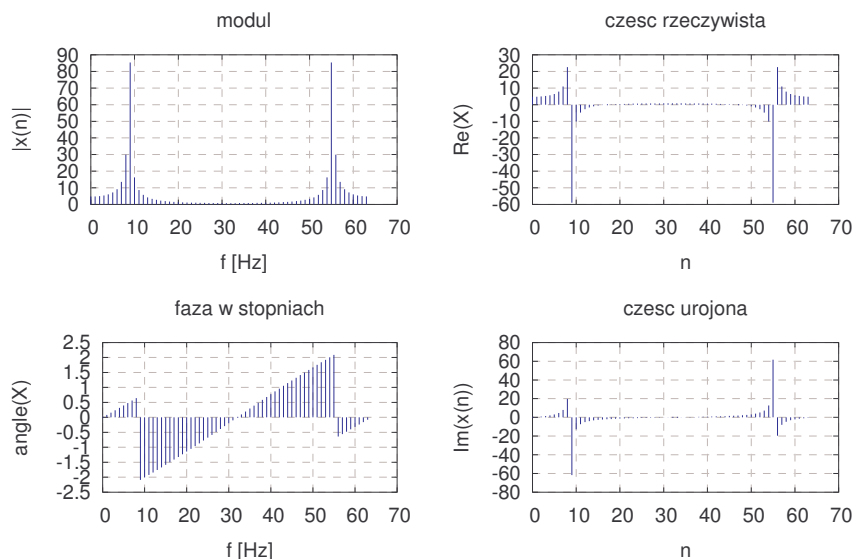
a) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 8.75 \cdot n/64)$, $N=64$



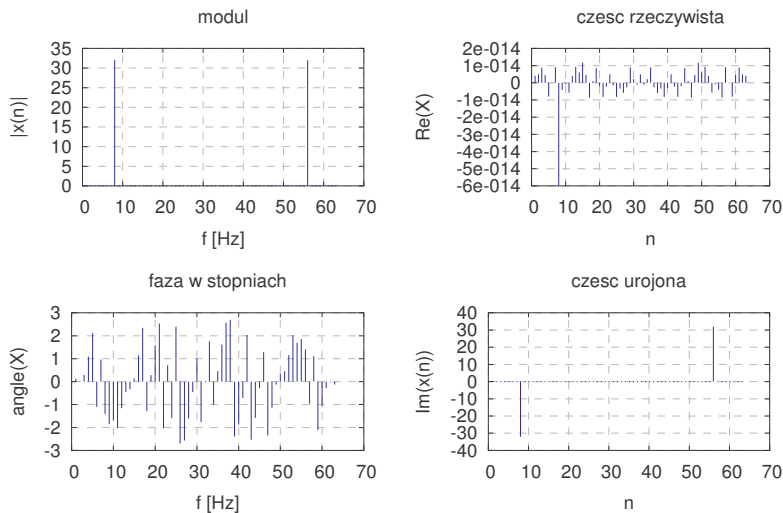
b) Sygnał $x = 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 8.75 \cdot n / 64)$, $N=64$



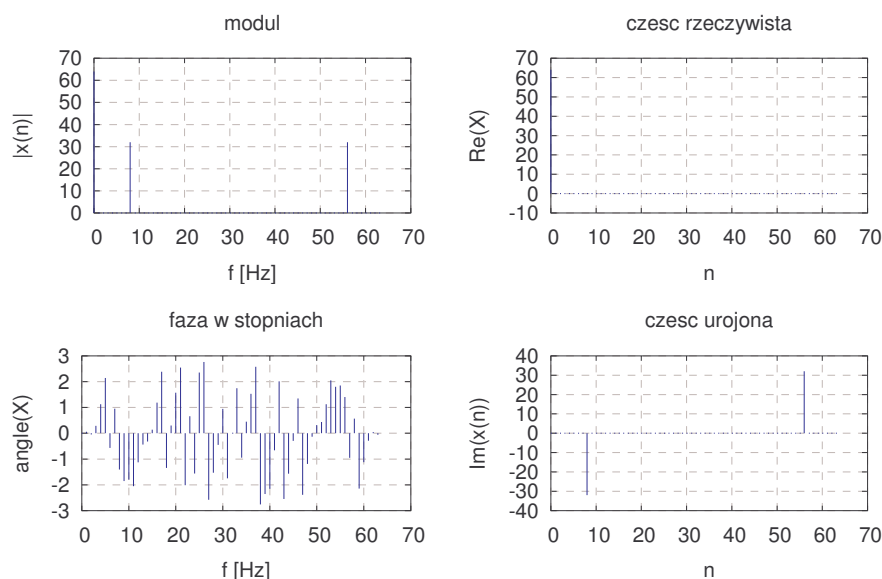
c) Sygnał $x = 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 8.75 \cdot n / 64)$, $N=64$



d) Sygnał $x = \sin(2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot n / 64)$, $N=64$



e) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 8 \cdot n/64) + 1$, $N=64$



Z analizy powyższych wykresów wynika, że modul jak i część rzeczywista DFT charakteryzuje się właściwością zwaną symetrią parzystą, podczas gdy faza i część urojona DFT charakteryzuje się symetrią nieparzystą. Wykresy a, b, c przedstawiają wpływ zmiany amplitudy sygnału na widmo amplitudowe tego sygnału. Zwiększając amplitudę proporcjonalnie rośnie widmo amplitudowe oraz ponadto część rzeczywista i urojona DFT.

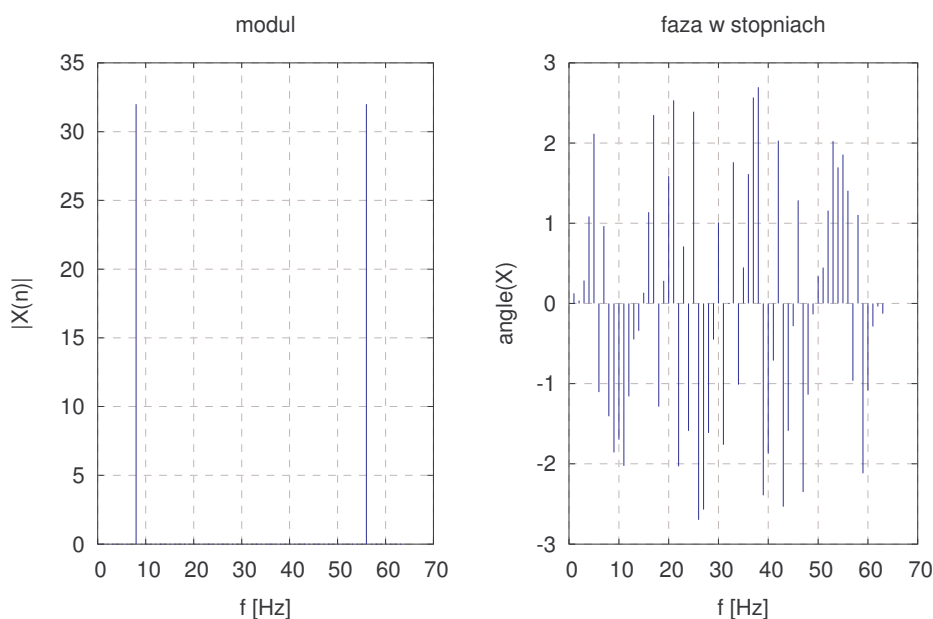
Jeżeli do sygnału dodamy składową stałą (wykres e) pojawi się ona w zerowym prążku zgodnie z zależnością:

$$X(0) = N \cdot w;$$

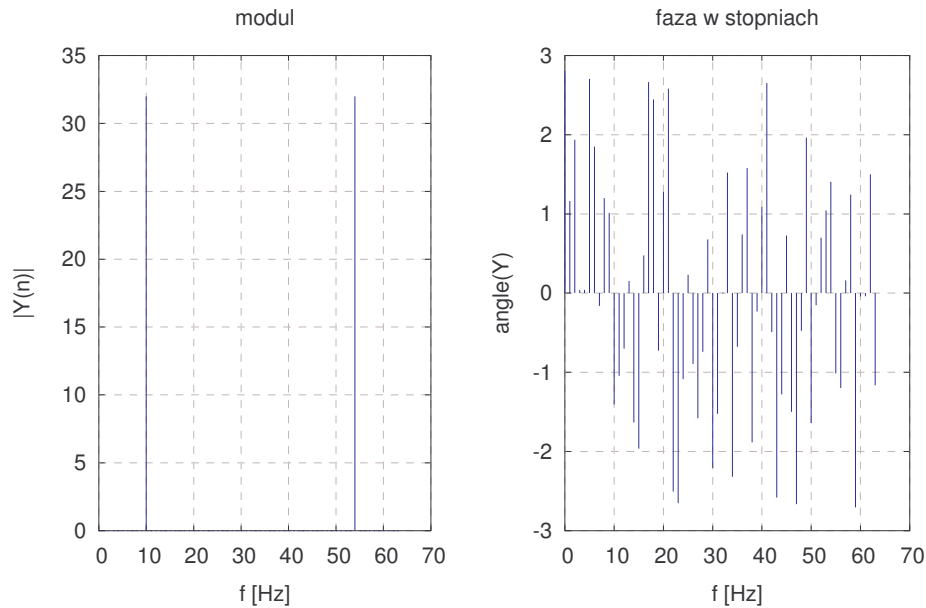
gdzie: w - składowa stała sygnału.

6. DFT sumy sygnałów

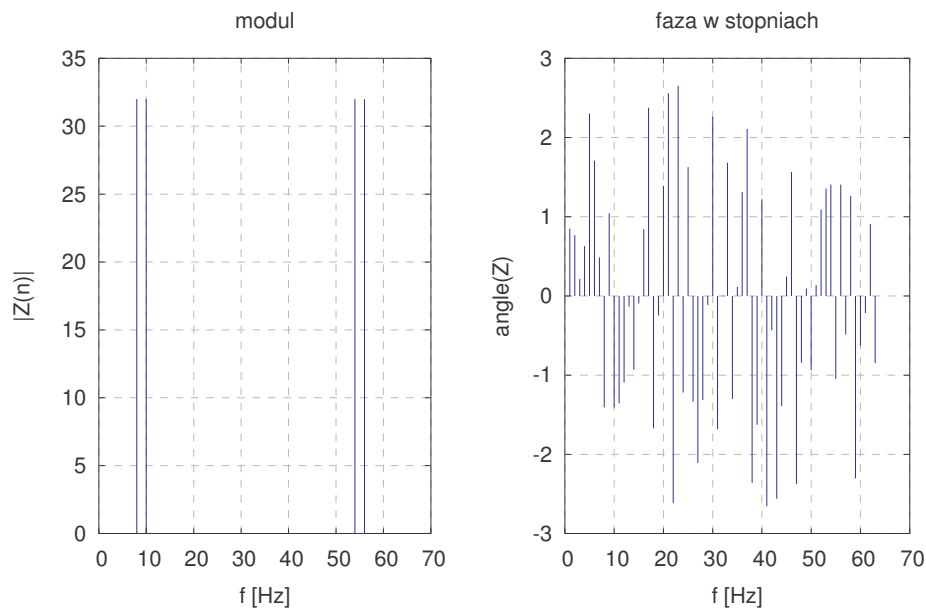
a) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 8 \cdot n/64)$, $N=64$



b) Sygnał $y = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot n/64)$, $N=64$



c) Sygnał $z = x + y$, $N=64$



Z analizy powyższych wykresów wynika, że DFT ma bardzo ważną właściwość znaną jako liniowość. Właściwość ta mówi, że DFT sumy dwóch sygnałów jest równa sumie transformat każdego z sygnałów; to jest, jeśli ciąg wejściowy $x(n)$ ma DFT równą $X(m)$, inny zaś ciąg wejściowy $y(n)$ ma DFT równą $Y(M)$, wówczas DFT sumy $z = x + y$ tych ciągów jest równy:

$$Z(m) = X(m) + Y(m).$$

7. Widmo fazowe

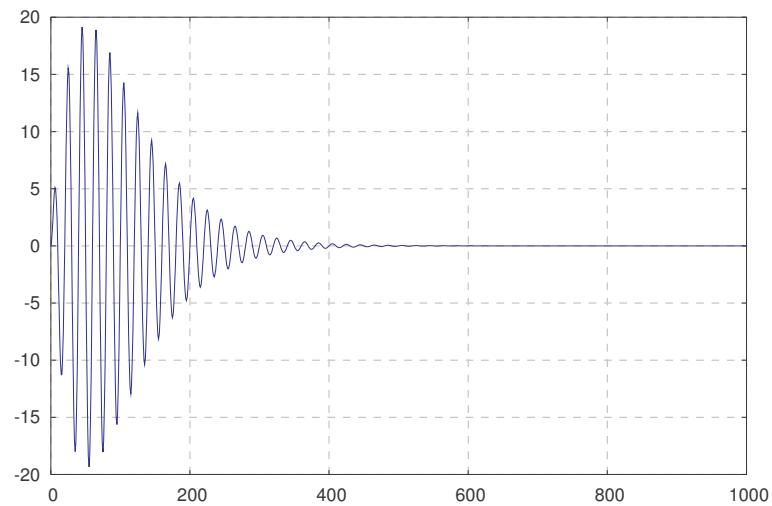
Obserwacja wykresu fazowego badanego sygnału, rozwijanie fazy.
W tym punkcie wykorzystaliśmy poniższy kod:

```

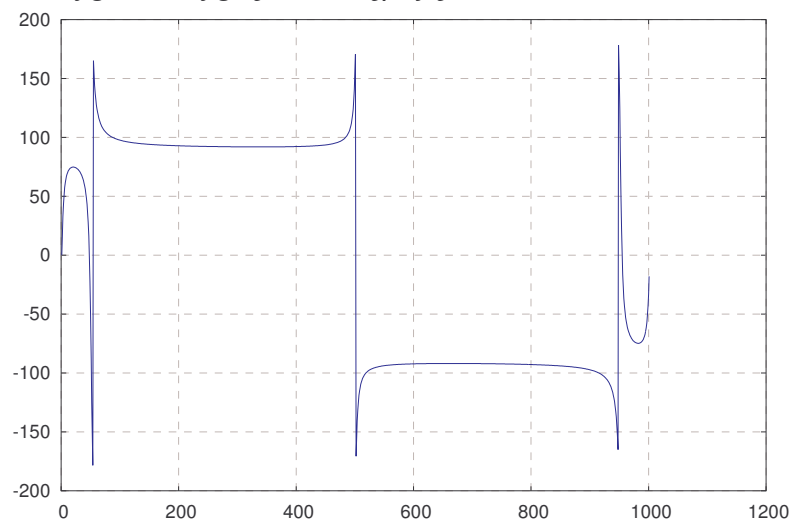
t = [0:1:1000]; % os czasu
syg = t.*exp(-0.019*t).*sin(2*pi*t/20); % sygnał (tlumiona sinusoida)
y = fft(syg); % DFT
yf = angle(y); % faza z DFT
yfr = unwrap(yf); % rozwinięta faza

```

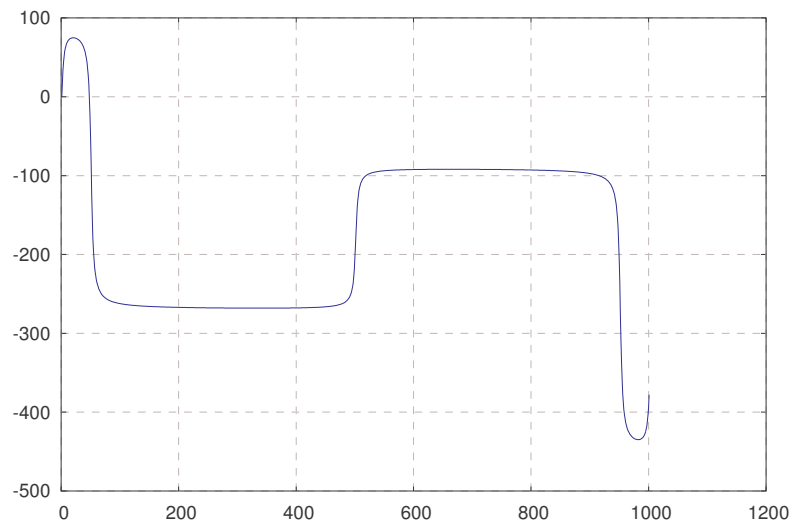
Sygnał ma postać:



Nierozwinięta faza sygnału wygląda następująco:

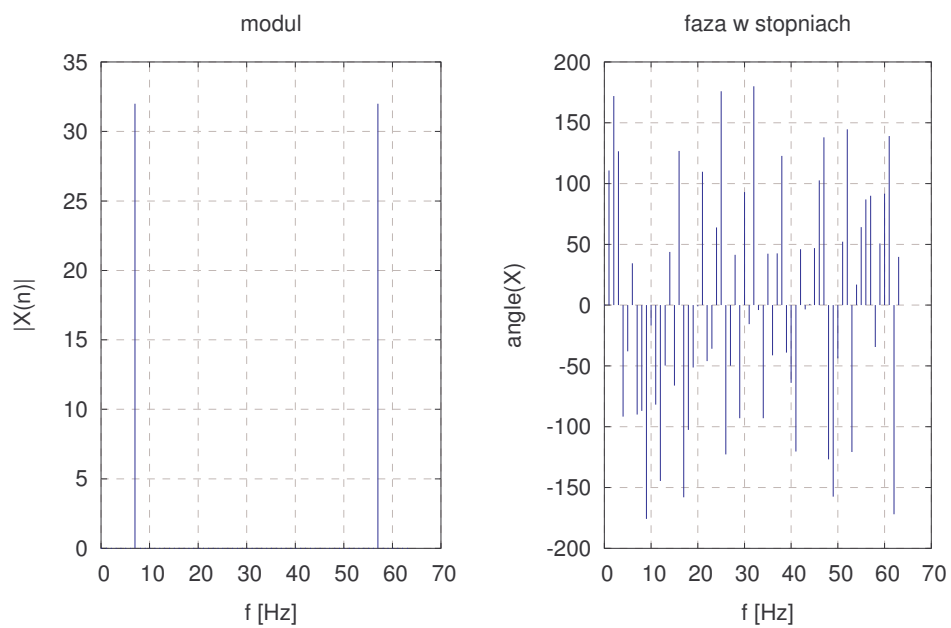


Rozwinięta faza sygnału wygląda następująco:

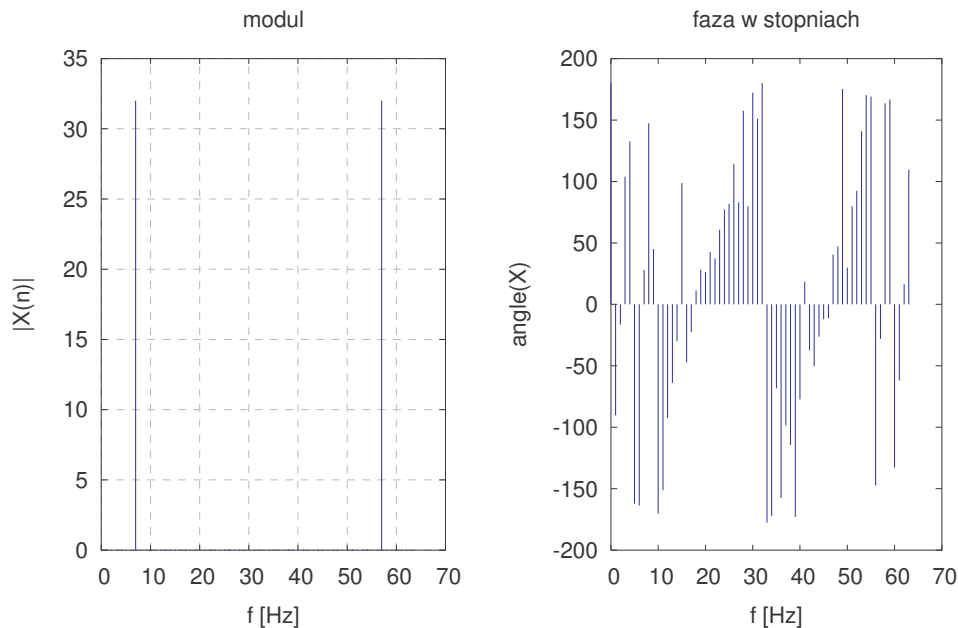


8. Widmo sygnału przesuniętego w czasie

a) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 7 \cdot n / 64)$



b) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 7 \cdot n / 64 + 2\pi \cdot 7 \cdot 3 / 64)$ przesunięty o 3 próbki



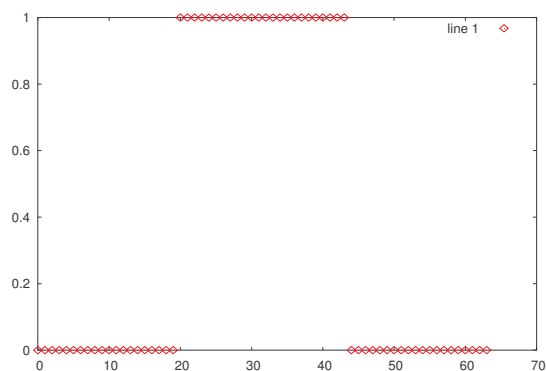
Z analizy powyższych wykresów wynika, że jeżeli punkt, w którym rozpoczynamy próbkowanie $x(n)$ jest przesunięty o k próbek to wyjściowe widmo $X_{\text{przesuniety}}(m)$ DFT ma moduł taki sam jak $X(m)$, natomiast zmianie ulega jedynie widmo fazowe, zgodnie z zależnością:

$$X_{\text{przesuniety}}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m),$$

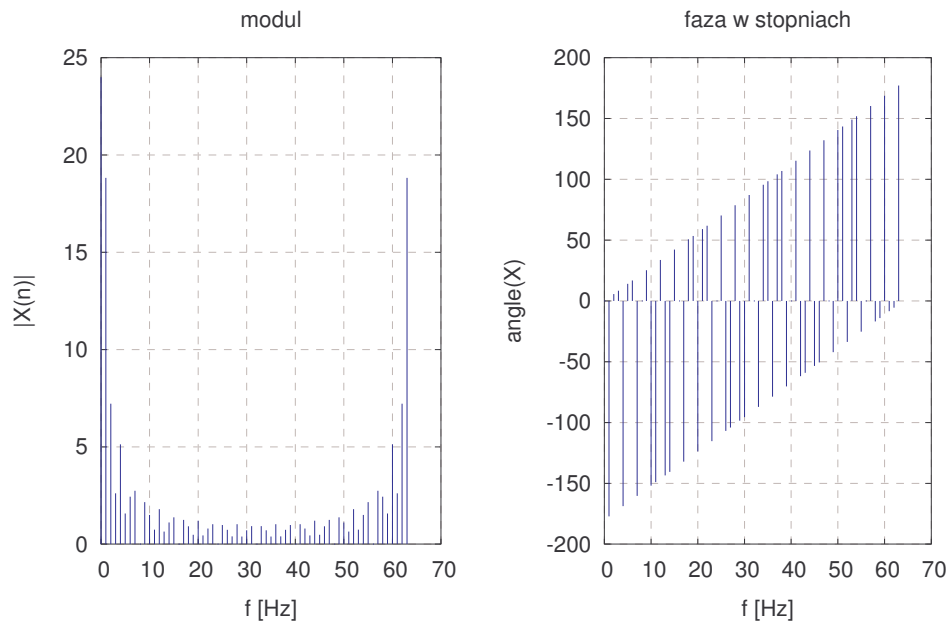
jeżeli próbkowany sygnał $x(n)$ jest przesunięty w prawo to k jest dodatnie, natomiast jeżeli w lewo to mamy wtedy $-k$.

9. DFT funkcji okna

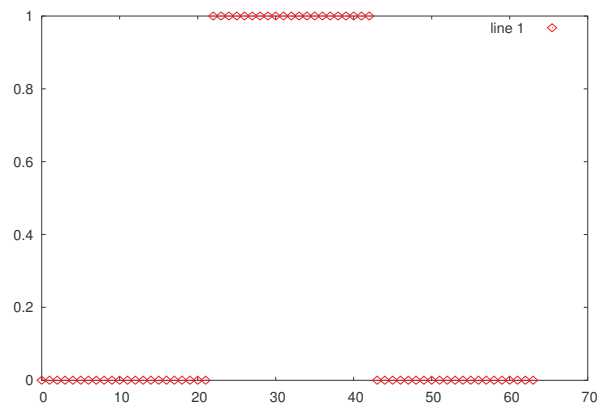
a) Okno prostokątne o długości 24 próbek



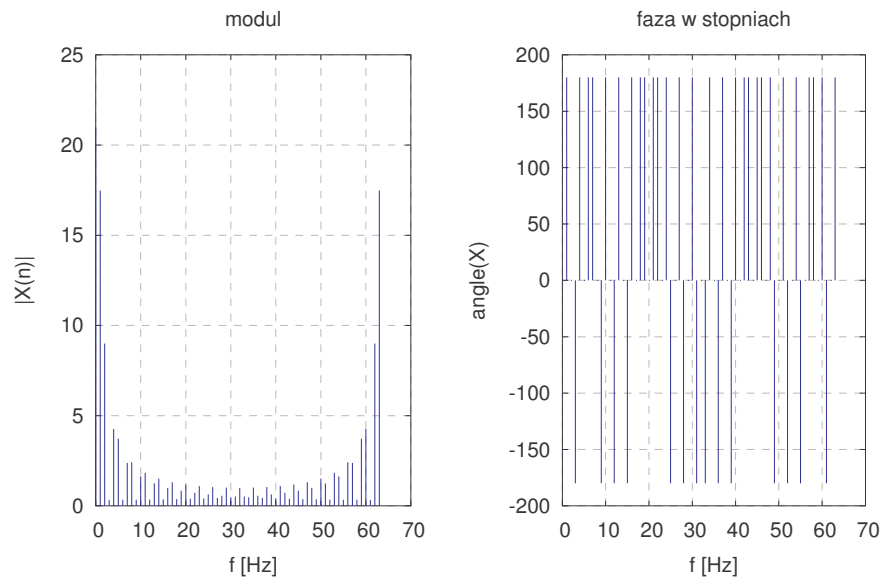
DFT sygnału przedstawionego powyżej ma postać:



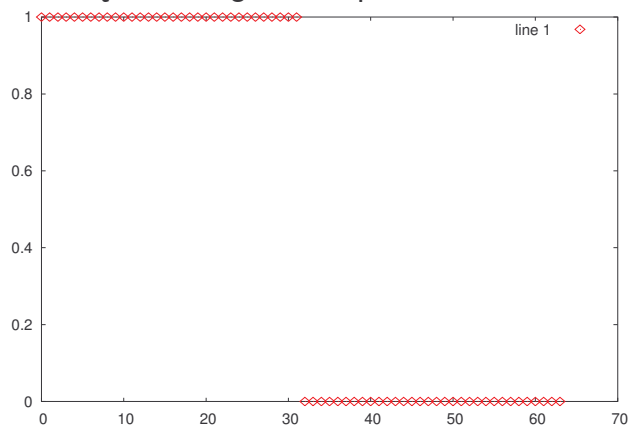
b) Okno prostokątne o długości 22 próbek



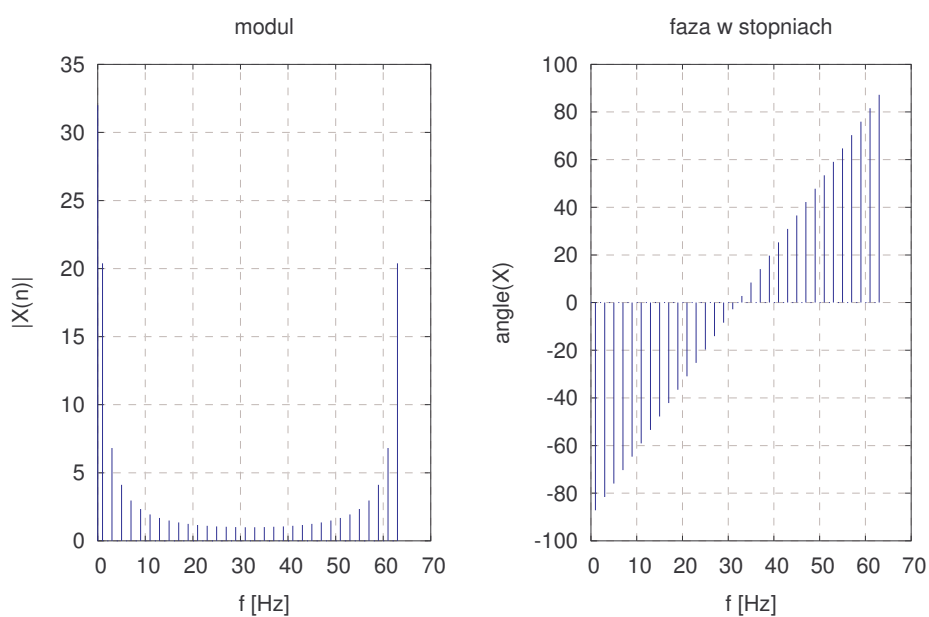
DFT sygnału przedstawionego powyżej ma postać:



c) Okno prostokątne o długości 32 próbek

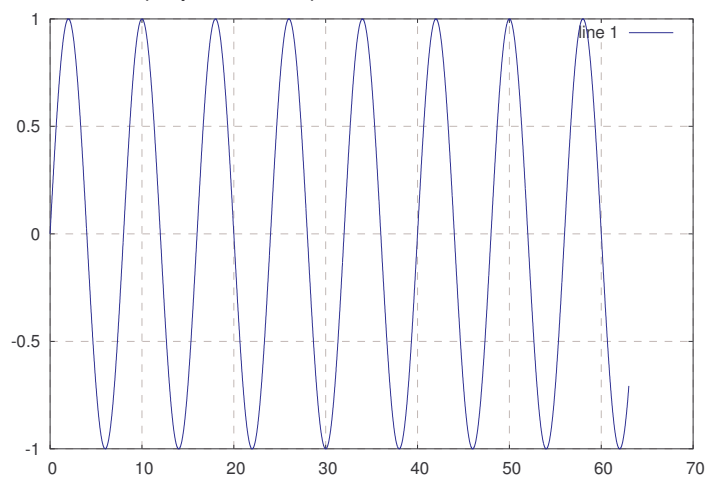


DFT sygnału przedstawionego powyżej ma postać:

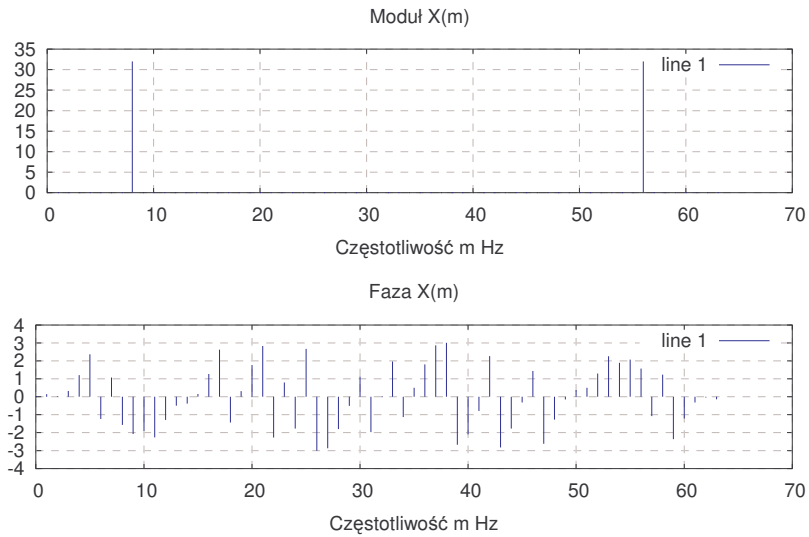


10. Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

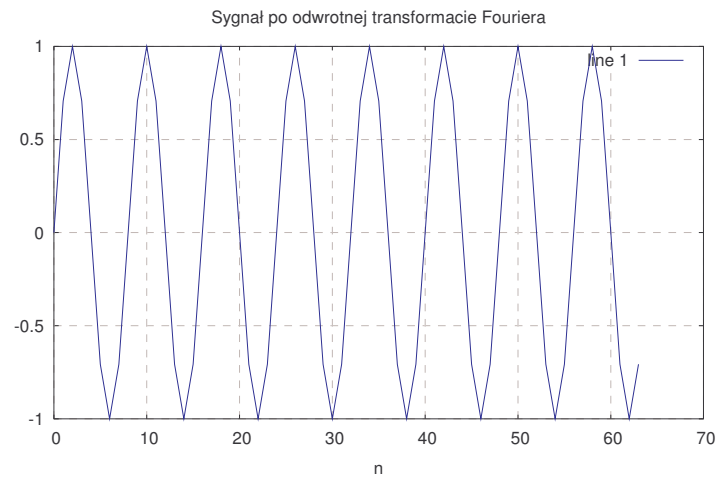
a) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 8 \cdot n/64)$:



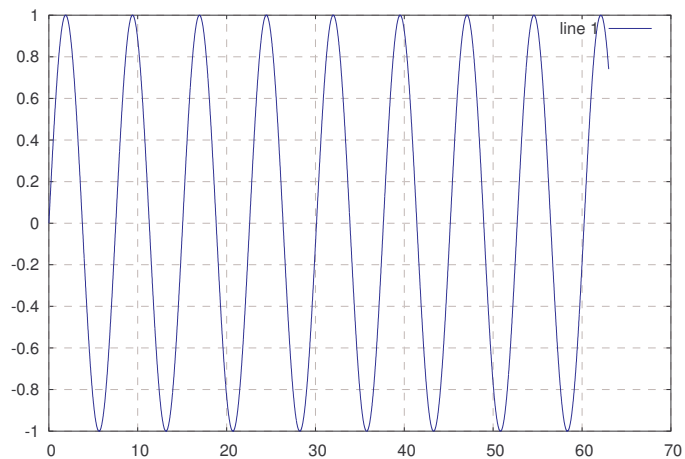
DFT sygnału powyżej:



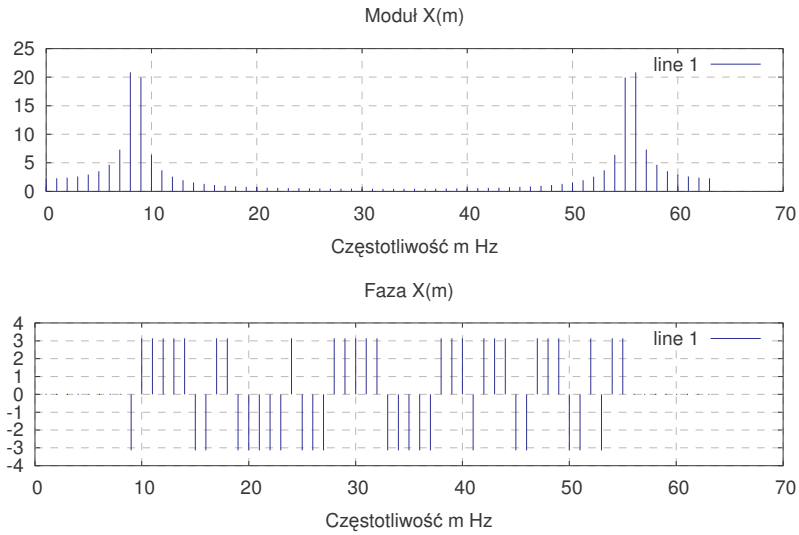
Sygnał po odwrotnej transformacji Fouriera:



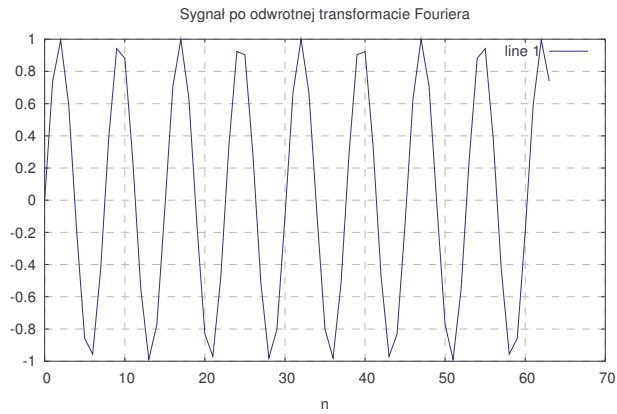
b) Sygnał $x = \sin(2\pi \cdot 8.5 \cdot n/64)$:



DFT sygnału powyżej:



Sygnał po odwrotnej transformacji Fouriera:



Z analizy powyższych wykresów wynika, że odwrotna transformata Fouriera zwraca sygnał bardzo podobny do sygnału oryginalnego.