

# Podstawy i algorytmy przetwarzania sygnałów – laboratorium

## Ćwiczenie nr 5

### Dystrybuanta i gęstość prawdopodobieństwa sygnałów losowych

#### Cel ćwiczenia:

Badanie rozkładów prawdopodobieństw i dystrybuant przykładowych sygnałów modelowych i fragmentów sygnału mowy. Wyznaczanie statystyk „po zmiennej” i „po realizacji”: ilustracja pojęć stacjonarności i ergodyczności sygnałów. Badanie łącznego rozkładu prawdopodobieństwa drugiego rzędu. Badanie rozkładów prawdopodobieństw sumy sygnałów. Badanie wpływu parametrów estymacji na uzyskane estymaty.

#### Zagadnienia do powtórzenia przed ćwiczeniem:

- definicje dystrybuanty i gęstości prawdopodobieństwa pierwszego i drugiego rzędu sygnału losowego.
- pojęcia stacjonarności i ergodyczności.
- rozkłady zmiennej losowej: normalny, jednostajny.
- niezależność zmiennych losowych, łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych losowych niezależnych.
- szum biały, szum kolorowy.
- estymacja gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty z wykorzystaniem histogramów.

### 1. Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta

Przeanalizować skrypt **histogramy1.m** i funkcje **prdens.m**, **prdist.m**, **gausspdf.m**, **gausscdf.m**, **unipdf.m**, **unicdf.m**, **sinpdf.m**, **sincdf.m**. Korzystając z wymienionych funkcji i modyfikując skrypt wyznaczyć gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty przykładowych sygnałów na podstawie wielu obserwacji w zadanych punktach na osi czasu oraz na podstawie jednej realizacji. Jakie własności analizowanych sygnałów możemy zaobserwować? Zbadać wpływ parametrów estymacji (ilość przedziałów obliczania histogramu, długość analizowanego sygnału) na uzyskiwane estymaty. Obliczenia przeprowadzać można na następujących sygnałach:

- sinusoida z losową fazą początkową  
gęstość prawdopodobieństwa dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

dystribuanta dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{\arcsin(x)}{\pi} + \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

- szum biały o rozkładzie gaussowskim
- szum biały o rozkładzie jednostajnym

Wykorzystać skrypt **histogramy2.m** do wyznaczenia gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty na podstawie wielu obserwacji w zadanych punktach na osi czasu oraz na podstawie jednej realizacji sygnału

$$y(t) = \alpha \cdot t, \quad 0 < t < 1,$$

gdzie  $\alpha$  jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$ .

W obliczeniach stosowana jest dyskretna oś czasu. Skrypt należy uruchomić wielokrotnie i obserwować uzyskane wyniki. Czym różnią się one od uzyskanych w przypadku sygnałów generowanych za pomocą skryptu **histogramy1.m**? Jakie własności ma badany sygnał?

## \*2. Łączny rozkład gęstości prawdopodobieństwa

Wykorzystując skrypt **histogramy3.m** oraz wprowadzone w nim modyfikacje zbadać łączny rozkład prawdopodobieństwa drugiego rzędu dla przykładowych sygnałów stacjonarnych. Skrypt wykreśla rozkład prawdopodobieństwa dla zadanego współczynnika przesunięcia czasowego  $\tau$ . O ile ogólnie gęstość prawdopodobieństwa drugiego rzędu opisuje funkcja  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , tak dla procesu stacjonarnego do opisu wystarczy funkcja  $f(x_1, x_2; t_2 - t_1) = f(x_1, x_2; \tau)$ . Przeanalizować można następujące sygnały:

- Szum gaussowski kolorowy. Zbadać wpływ filtracji dolnoprzepustowej zastosowanej do szumu białego na gęstość prawdopodobieństwa. Co obserwujemy zwiększając wartość  $\tau$ ? Kiedy na podstawie obserwacji gęstości prawdopodobieństwa możemy wnioskować o stopniu korelacji zmiennych losowych, o niezależności zmiennych losowych? Zwrócić uwagę na przypadek gęstości zdegenerowanej, gdy  $\tau = 0$ .
- Szum biały o rozkładzie jednostajnym przefiltrowany dolnoprzepustowo. Porównać uzyskane wyniki z przypadkiem szumu gaussowskiego. Jak zmienia się gęstość prawdopodobieństwa szumu o rozkładzie jednostajnym po filtracji? Jaki rozkład gęstości zaczyna przypominać?
- Sygnał sinusoidalny. Zaobserwować gęstości prawdopodobieństwa dla różnych wartości  $\tau$ .

## 3. Rozkład prawdopodobieństwa sumy sygnałów

Jeżeli zmienne losowe  $x$  i  $y$  są niezależne i mają gęstości prawdopodobieństw odpowiednio  $f_x$  i  $f_y$  i jeżeli zmienna losowa  $z = x + y$  to gęstość prawdopodobieństwa  $f_z = f_x * f_y$ , gdzie  $*$  oznacza operację splotu. Sprawdzić tę własność na przykładzie sumy sygnałów prostokątnego i szumu gaussowskiego. Napisać odpowiedni skrypt. Sygnał prostokątny generuje funkcja **rect.m**.

## 4. Dystrybuanta i rozkład prawdopodobieństwa dla sygnału mowy

Zbadać rozkłady prawdopodobieństwa i dystrybuanty fragmentu sygnału mowy. Zwrócić uwagę na fragmenty w przybliżeniu stacjonarne. Wyznaczyć gęstości prawdopodobieństwa dla tych fragmentów i dla całego sygnału. **Każdy student analizuje przydzielony mu sygnał.** Plik w formacie wav można wczytać wykorzystując funkcję *auload*.

### Literatura:

1. Tomasz P. Zieliński, „*Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*”, Wydział EAIiE AGH, Kraków 2000, str. 22–26
2. Jerzy Szabatin, „*Podstawy teorii sygnałów*”, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Wyd. 3, Warszawa 2000, str. 142–156, 160–171, 175–187, 196–223

### Dodatek: m-pliki do ćwiczenia nr 5

#### Skrypty

histogramy1 - wykresla estymaty rozkladu prawdopodobienstwa i dystrybuanty I-szego rzędu  
histogramy2 - wykresla estymaty rozkladu prawdopodobienstwa i dystrybuanty I-szego rzędu  
histogramy3 - wykresla estymaty dwuwymiarowej gestosci prawdopodobienstwa

#### Funkcje

gausscdf - podaje wartosc dystrybuanty rozkladu normalnego  $N(0,1)$   
gausspdf - podaje wartosc gestosci prawdopodobienstwa rozkladu normalnego  $N(0,1)$   
prdens - wykresla znormalizowany histogram ze zbioru obserwacji  
prdist - wykresla dystrybuante empiryczna ze zbioru obserwacji  
rect - generuje sygnal prostokatny o wartosciach -1, 1  
sincdf - podaje wartosc dystrybuanty w punkcie x rozkladu zmiennej losowej  $\sin(\phi)$   
sinpdf - podaje wartosci gestosci prawdopodobienstwa zmiennej losowej  $\sin(\phi)$   
unicdf - podaje wartosci dystrybuanty zmiennej losowej o rozkladzie jednostajnym  
unipdf - podaje wartosc gestosci prawdopodobienstwa zmiennej losowej o rozkladzie jednostajnym