

Podstawy i algorytmy przetwarzania sygnałów – laboratorium

Ćwiczenie nr 7

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT)

Cel ćwiczenia:

Zapoznanie się z podstawowymi właściwościami dyskretnego przekształcenia Fouriera. Badanie odwrotnego dyskretnego przekształcenia Fouriera. Porównanie wydajności obliczeniowej szybkiego przekształcenia Fouriera i dyskretnego przekształcenia Fouriera obliczanego z definicji. Badanie próbkowania widma ciągłego i analiza zjawiska przecieku widma. Badanie właściwości części rzeczywistej i urojonej widma, oraz realizacja operacji rozwijania fazy.

Funkcje niezbędne w tym ćwiczeniu i sposób ich wywołania:

Nazwa Operacji	Realizacja w Octave	Opis
DFT	<code>y = fft(x, N);</code>	x - sygnał badany, N - długość transformaty w próbkach
FFT	<code>y = fft(x, N);</code>	x - sygnał badany, N - długość transformaty w próbkach (musi być potęgą liczby 2), w przypadku kiedy N jest większe od długości sygnału dokładane są na jego końcu zera
Moduł DFT	<code>ym = abs(y);</code>	y - DFT z sygnału x
Faza DFT	<code>yf = angle(y);</code>	y - DFT z sygnału x
Rozwijanie fazy	<code>yfr = unwrap(angle(y));</code>	y - DFT z sygnału x
Odwrotna DFT	<code>x = ifft(y);</code>	y - reprezentacja sygnału w dziedzinie częstotliwości
Wykres w skali logarytmicznej	<code>semilogy(ym)</code>	wykres modułu DFT, oś wartości w skali logarytmicznej
Wykres w postaci prążków	<code>stem(ym)</code>	wykres modułu DFT w postaci prążków, oś wartości w skali liniowej
Tworzenie sygnału zespolonego	<code>x = complex(x_re, x_im)</code>	x_re, x_im - sygnały rzeczywiste, które po złożeniu stanowią część rzeczywistą i urojona sygnału x

1. Podstawy obliczania DFT

Korzystając ze skryptu *baza.m* zaobserwować sygnały bazowe dyskretnego przekształcenia Fouriera. Skrypt umożliwi wizualizację składowej rzeczywistej i urojonej kilku pierwszych sygnałów bazowych. Przeanalizować dwa sposoby obliczania wektorów bazowych (jeden, obliczający w pętli kolejne wektory i drugi, zawierający się w jednej linii i wykorzystujący wektoryzację pętli).

Napisać skrypt pozwalający porównać czas obliczania DFT z definicji z czasem obliczania FFT. Porównanie (powtórzone kilkakrotnie) przeprowadzić dla sygnałów o długości $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256$. Zamieścić skrypt generujący wyniki pozwalające ocenić różnice w czasach obliczeń.

Napisać funkcję *m2freq()* dokonującą konwersji numerów prążków ($m = 0 \dots N-1$) na częstotliwości analizy. Prototyp funkcji:

```
[f] = m2freq(m, fs)
%M2FREQ dokonuje konwersji numerów na częstotliwości analizy
% [f] = m2freq(m, fs)
%
% Wejście:
% m      - wektor wierszowy z numerami prążków,
% fs     - częstotliwość próbkowania.
%
% Wyjście:
% f      - wektor wierszowy z częstotliwościami analizy
%          odpowiadającymi poszczególnym numerom prążków.
```

Funkcja pozwoli na skalowanie osi częstotliwości wykresów wyników DFT w jednostkach częstotliwości.

2. Próbkowanie widma ciągłego

Wyznaczyć DFT dla przebiegu sinusoidalnego o całkowitej i niecałkowitej liczbie okresów w N próbkach. Obserwacja efektu próbkowania widma ciągłego dla takiego przebiegu, które aproksymowane jest przez funkcję:

$$X(m) = \frac{N}{2} \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)}$$

gdzie: m – częstotliwość dyskretna,
 k – liczba okresów sinusoidy w N próbkach.

2. Przeciek widma

Wyznaczenie DFT dla przebiegu sinusoidalnego, którego częstotliwość f_{sin} jest różna od częstotliwości analizy DFT f_a , czyli:

$$f_{sin} \neq f_s \cdot \frac{m}{N}$$

gdzie $m = 0, 1, \dots, N-1$ – częstotliwość dyskretna,
 f_s – częstotliwość próbkowania,
 N – długość transformaty.

Obserwacja efektu przecieku widma.

3. Zwiększanie rozdzielczości DFT

Zwiększenie rozdzielczości DFT poprzez dołożenie na końcu badanego sygnału zer, co powoduje zwiększenie długości transformaty i zmniejszenie wartości częstotliwości analizy f_a .

4. Zbadanie właściwości części rzeczywistej i urojonej DFT.

Zbadać symetrię części rzeczywistej i urojonej widma.

Przeanalizować wartości widma amplitudowego sygnału. W tym celu można wygenerować pojedynczy sygnał harmoniczny, zaobserwować wartości widma, a następnie zwiększyć amplitudę dwukrotnie, trzykrotnie.

Określić związek pomiędzy wartością składowej stałej sygnału, a wartością widma $X(0)$.

5. DFT sumy sygnałów

Zbadanie właściwości DFT dla sumy dwóch sinusoid: czy suma transformat sygnałów x i y równa jest transformacie $x + y$?

6. Widmo fazowe

Obserwacja wykresu fazowego badanego sygnału, rozwijanie fazy. Można tutaj wykorzystać poniższy kod:

```
t = [0:1:1000]; % os czasu
syg = t.*exp(-0.019*t).*sin(2*pi*t/20); % sygnał (tłumiona sinusoida)
y = fft(syg); % DFT
yf = angle(y); % faza z DFT
yfr = unwrap(yf); % rozwinięta faza
```

7. Widmo sygnału przesuniętego w czasie

Wyznaczenie DFT dla przesuniętego sygnału sinusoidalnego w czasie. Obserwacja modułu i fazy DFT - twierdzenie o przesunięciu (moduł niezmienny, inna faza).

8. DFT funkcji okna prostokątnego

Wyznaczenie DFT dla funkcji okna prostokątnego - *jadro Dirichleta*. Obserwacja modułu i fazy.

9. DFT sygnału zespolonego.

Wyznaczenie DFT dla pobudzenie zespolonego. Zbadanie właściwości modułu, fazy, części rzeczywistej i urojonej transformaty.

10. Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

Wyznaczenie odwrotnej DFT dla wybranego sygnału i porównanie jej z sygnałem oryginalnym.