

Wykład IV - Omawiane zagadnienia

- ▶ Momenty zwykłe
- ▶ Momenty centralne
- ▶ Momenty zmiennej losowej normalnej
- ▶ Mediana, moda
- ▶ Funkcje zmiennej losowej

Definicja: Momentem zwykłym rzędu k ($k = 1, 2, \dots$) zmiennej losowej \mathbf{X} nazywamy:

$$m_k = \sum_i x_i^k p_i \quad (1)$$

dla zmiennej losowej skokowej,

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

Definicja: Moment zwykły rzędu pierwszego nazywamy wartością przeciętną (wartością oczekiwaną, średnią):

$$m_1 = \eta = E\{\mathbf{X}\} = \sum_i x_i p_i \quad (3)$$

dla zmiennej losowej skokowej,

$$m_1 = \eta = E\{\mathbf{X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (4)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

Przykład: Rzucamy monetę. Oznaczmy wyrzucenie orła liczbą 1, natomiast reszki liczbą 0. Niech $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$. W takim razie

$$E(\mathbf{X}) = 1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Przykład: Rzucamy monetę. Oznaczmy wyrzucenie orła liczbą 1, natomiast reszki liczbą 0. Niech $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$. W takim razie

$$E(\mathbf{X}) = 1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Przykład: Zmienna losowa o rozkładzie zero-jedynkowym przybiera wartość 1 z prawdopodobieństwem p oraz 0 z prawdopodobieństwem q . W takim razie

$$E(\mathbf{X}) = 1 * p + 0 * q = p$$

Przykład: Zmienna losowa ma rozkład dwumianowy o parametrach p, n . W takim razie

$$E(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots = np \quad (5)$$

Dla zmiennej losowej \mathbf{X} o rozkładzie Poissona

$$E(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \dots = np \quad (6)$$

Jeśli zmienna losowa \mathbf{X} ma rozkład prostokątny, tj.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < a \text{ i } x > b \end{cases}$$

Wtedy

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Przykład: Zmienna losowa \mathbf{X} podlega rozkładowi $P(\mathbf{X} = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$, gdzie $p_k = 2/3^k$ oraz $x_k = (-1)^k 3^k / k$. Wyznaczyć moment zwykły rzędu pierwszego.

Rozwiązanie: Wyznaczamy sumę:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 2 * \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i / i = -2 \ln 2$$

Twierdzenie: Wartość oczekiwana sumy dowolnej skończonej liczby zmiennych losowych równa się sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych

$$E(\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n) = E(\mathbf{X}_1) + \dots + E(\mathbf{X}_n) \quad (7)$$

Twierdzenie: Wartość oczekiwana iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych równa się iloczynowi wartości oczekiwanych tych zmiennych

$$E(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2) = E(\mathbf{X}_1) E(\mathbf{X}_2) \quad (8)$$

Definicja: Momentem centralnym rzędu k , ($k = 1, 2, \dots$) zmiennej losowej \mathbf{X} nazywamy

$$\mu_k = \sum_i (x_i - m_1)^k p_i \quad (9)$$

dla zmiennej losowej skokowej,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_1)^k f(x) dx \quad (10)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

Mamy $\mu_1 = 0$.

Definicja: Moment centralny rzędu drugiego μ_2 nazywamy **wariancją**, a pierwiastek z niego **odchyleniem standardowym**.

$$\mu_2 = D^2(\mathbf{X}) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - E\{\mathbf{X}\})^2 p_i \quad (11)$$

dla zmiennej losowej skokowej,

$$\mu_2 = D^2(\mathbf{X}) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E\{\mathbf{X}\})^2 f(x) dx \quad (12)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

Twierdzenie: Zachodzi związek

$$\mu_2 = E(\mathbf{X}^2) - E^2(\mathbf{X}) = m_2 - m_1^2 \quad (13)$$

Przykład: Zmienna losowa \mathbf{X} ma rozkład zero-jedynkowy. Z przykładu wyżej wiadomo, że $E(\mathbf{X}) = p$. Tak więc

$$E(\mathbf{X}^2) = 1^2 * p + 0^2 * q = p$$

oraz

$$\mu_2 = E(\mathbf{X}^2) - E^2(\mathbf{X}) = p - p^2 = pq$$

Przykład: Rzucamy sześcienną kostką do gry. Obliczyć wariancję wyrzuconych oczek na kostce.

Rozwiązanie:

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{6} * (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$$

$$D^2(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - E^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{6} * (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 3.5^2 = 2\frac{11}{12}$$

Dla zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym mamy

$$\mu_2 = npq$$

Dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy

$$\mu_2 = pq$$

Twierdzenie: Wariancja sumy n niezależnych zmiennych losowych wynosi

$$D^2(\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n) = \sum_{i=1}^n D^2(\mathbf{X}_i) \quad (14)$$

Twierdzenie: Wariancja różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych wynosi

$$D^2(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = D^2(\mathbf{X}_1) + D^2(\mathbf{X}_2) \quad (15)$$

Definicja: Jeżeli \mathbf{X} jest zmienną losową o odchyleniu standardowym $D(\mathbf{X}) = \sigma$, to zmienną losową $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{\sigma}$ nazywamy **unormowaną**.

Twierdzenie: Wariancja zmiennej losowej unormowanej jest równa jeden.

Dowód:

$$D^2(\mathbf{Y}) = D^2\left(\frac{\mathbf{X}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D^2(\mathbf{X}) = 1 \quad (16)$$

Definicja: Jeżeli \mathbf{X} jest zmienną losową o wartości oczekiwanej $E(\mathbf{X}) = \eta$ i odchyleniu standardowym $D(\mathbf{X}) = \sigma$, to zmienną losową $Y = \frac{\mathbf{X} - \eta}{\sigma}$ nazywamy **standaryzowaną**.

Twierdzenie: Wartość oczekiwana zmiennej losowej standaryzowanej jest równa zero, a wariancja jest równa jeden.
Dowód:

$$E(\mathbf{Y}) = E\left(\frac{\mathbf{X} - \eta}{\sigma}\right) = \frac{E(\mathbf{X}) - \eta}{\sigma} = \frac{\eta - \eta}{\sigma} = 0 \quad (17)$$

oraz

$$D^2(\mathbf{Y}) = D^2\left(\frac{\mathbf{X} - \eta}{\sigma}\right) = D^2\left(\frac{\mathbf{X}}{\sigma} - \frac{\eta}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1 \quad (18)$$

Moment centralny można wyrazić za pomocą wartości oczekiwanej w sposób następujący:

$$\mu_k = E((\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^k) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r E(\mathbf{X})^r m_{k-r} \quad (19)$$

np.:

$$\mu_2 = E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

W podobny sposób można wyrazić momenty zwykłe za pomocą momentów centralnych

$$m_k = E(\mathbf{X})^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} E(\mathbf{X})^r \mu_{k-r} \quad (20)$$

Momenty absolutne definiujemy jako:

$$M_k = E\{|\mathbf{X}|^k\} = \sum_i |x_i|^k p_i \quad (21)$$

dla zmiennej losowej skokowej,

$$M_k = E\{|\mathbf{X}|^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) dx \quad (22)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

Momenty uogólnione względem a definiujemy jako

$${}_am_k = E\{(\mathbf{X} - a)^k\} \quad i \quad {}_aM_k = E\{|\mathbf{X} - a|^k\} \quad (23)$$

Przykład: Jeśli zm. l. \mathbf{X} ma rozkład jednostajny w przedziale $(-c, c)$, to $f(x) = \frac{1}{2c}$ w tym przedziale i zero poza nim. Stąd

$$E\{\mathbf{X}^{2n}\} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c x^{2n} dx = \frac{c^{2n}}{2n+1}$$

Wobec tego wariancja równa się

$$\sigma^2 = E\{\mathbf{X}^2\} = \frac{c^2}{3} \quad (24)$$

Momenty nieparzyste tej zmiennej są równe zeru.

Gdy zm. l. \mathbf{X} ma rozkład normalny z wartością średnią równą zero

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

to

$$E\{\mathbf{X}^n\} = \begin{cases} 1 * 3 * \dots * (n-1)\sigma^n & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases} \quad (25)$$

$$E\{|\mathbf{X}|^n\} = \begin{cases} 1 * 3 * \dots * (n-1)\sigma^n & \text{dla } n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1} & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (26)$$

Gdy wartość średnia $\eta \neq 0$ oraz wariancja $\sigma^2 \neq 0$ to momenty zwykłe są funkcjami tychże parametrów

$$m_k(\eta, \sigma^2) = \frac{k(k-1)}{2} \int_0^{\sigma^2} m_{k-2}(\eta, \sigma^2) d\sigma^2 + \eta^k \quad (27)$$

Ponieważ $m_0 = 1$ to $m_2 = \sigma^2 + \eta^2$ oraz $m_4 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\eta^2 + \eta^4$.

Ponieważ $m_1 = \eta$ to $m_3 = 3\sigma^2\eta + \eta^3$.

Analogicznie dla momentów centralnych mamy

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2} \int_0^{\sigma^2} \mu_{k-2} d\sigma^2 \quad (28)$$

Wskaźniki położenia (charakterystyki pozycyjne) - wartości charakteryzujące położenie zbioru wartości zmiennej losowej.

Wyróżnia się: średnią, medianę, modę.

Zastosowania: badanie własności rozkładu zmiennej losowej, porównanie różnych rozkładów ze sobą.

Definicja: Medianą Me zmiennej losowej \mathbf{X} nazywamy liczbę x spełniającą związek

$$P(\mathbf{X} \leq x) \geq \frac{1}{2} \quad i \quad P(\mathbf{X} \geq x) \geq \frac{1}{2} \quad (29)$$

Dla zmiennej losowej ciągłej powyższe warunki sprowadzają się do

$$F(x) = \frac{1}{2} \quad tj. \quad \int_{-\infty}^{x=Me} f(x) dx = \frac{1}{2} \quad (30)$$

Definicja: Modą (dominantą) M_o zmiennej losowej X nazywamy:

1. dla zmiennej losowej skokowej - wartość zmiennej losowej, której odpowiada największe prawdopodobieństwo
2. dla zmiennej losowej ciągłej - wartość, dla której gęstość przyjmuje maksimum lokalne.

Przykład: Wyznaczyć medianę i modę zmiennej losowej \mathbf{X} o rozkładzie jak w tabeli.

x_k	2	5	7	10
$P(\mathbf{X} = x_k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

Przykład: Wyznaczyć medianę i modę zmiennej losowej \mathbf{X} o rozkładzie jak w tabeli.

x_k	2	5	7	10
$P(\mathbf{X} = x_k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

Rozwiązanie: Mediana $Me = 7$ ponieważ

$$P(\mathbf{X} \leq 7) = \frac{8}{9} > \frac{1}{2} \quad i \quad P(\mathbf{X} \geq 7) = \frac{6}{9} > \frac{1}{2}$$

Z tabeli widać, że moda $Mo = 7$.

Przykład: Wyznaczyć medianę i modę zmiennej losowej \mathbf{X} o rozkładzie jak w tabeli.

x_k	1	3	5	10
$P(\mathbf{X} = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Przykład: Wyznaczyć medianę i modę zmiennej losowej \mathbf{X} o rozkładzie jak w tabeli.

x_k	1	3	5	10
$P(\mathbf{X} = x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Rozwiązanie: Mediana jest liczbą z przedziału $< 3, 5 >$.

Moda nie istnieje, ponieważ brak jest największego prawdopodobieństwa.

Funkcje zmiennej losowej

Zmienna losowa \mathbf{Y} będzie funkcją zmiennej losowej \mathbf{X} jeśli dla każdego x_i mamy

$$\mathbf{Y}(x_i) = g(\mathbf{X}(x_i))$$

gdzie $g(x)$ jest funkcją borelowską¹.

¹czyli $\{x : g(x) < a, \ a \in R^1\}$ jest zbiorem borelowskim

Dystrybuanta zmiennej losowej \mathbf{Y}

$$F_{\mathbf{Y}}(y) = P(\mathbf{Y} \leq y) = P(g(\mathbf{X}) \leq y) \quad (31)$$

Gęstość zmiennej losowej Y

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{dF_{\mathbf{Y}}(y)}{dy} \quad (32)$$

Przykład: Rozpatrzmy funkcję

$$\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$$

Znając dystrybuantę $F_{\mathbf{X}}$ wyznaczmy $F_{\mathbf{Y}}$

$$F_{\mathbf{Y}}(y) = P(\mathbf{Y} \leq y) = P(a\mathbf{X} + b \leq y) \quad (33)$$

Jeśli $a > 0$ to

$$P(a\mathbf{X} + b \leq y) = P(\mathbf{X} \leq \frac{y - b}{a}) = F_{\mathbf{X}}(\frac{y - b}{a}) \quad (34)$$

Jeśli $a < 0$ to

$$F_{\mathbf{Y}}(y) = P(\mathbf{Y} \leq y) = P(\mathbf{X} \geq \frac{y-b}{a}) = 1 - F_{\mathbf{X}}(\frac{y-b}{a}) \quad (35)$$

Przykład: Wyznaczyć $F_Y(y)$ poprzez $F_X(x)$ dla

$$Y = \frac{1}{X^2}$$

Rozwiązanie: Dla $y > 0$ równanie $y = \frac{1}{x^2}$ ma dwa rozwiązania

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Ponieważ

$$g(x) \leq y \quad \text{gdy} \quad x \leq x_1 \quad \text{lub} \quad x \geq x_2$$

Dlatego

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq -\frac{1}{\sqrt{y}}) + P(X \geq \frac{1}{\sqrt{y}}) = \\ &= F_X(-\frac{1}{\sqrt{y}}) + 1 - F_X(\frac{1}{\sqrt{y}}) \end{aligned}$$

Przykład: Rzucamy prawidłową kostką. Wynikami są liczba oczka na sześciu ściankach s_1, \dots, s_6 , dla których $P(s_i) = \frac{1}{6}$.

Określamy zm. l. \mathbf{X} przez $\mathbf{X}(s_i) = i$. Zatem \mathbf{X} przyjmuje wartości $1, 2, \dots, 6$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

a) Niech $g(x) = x^2$. Tworzymy zm. l. $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2$. Oczywiście \mathbf{Y} przyjmuje sześć wartości: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$.

b) Okreslamy \mathbf{X} przez $\mathbf{X}(s_i) = i - 3$. Teraz \mathbf{X} przyjmuje wartości $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Jeśli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2$ to \mathbf{Y} przyjmuje wartości: $0, 1, 4, 9$ z prawdopodobieństwami odpowiednio: $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

Funkcja gęstości zmiennej losowej $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$:

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = f_{\mathbf{X}}(h(y)) * |h'(y)| \quad (36)$$

gdzie $x = h(y)$

Przykład: Dana jest zm. l. \mathbf{X} i jej $f_{\mathbf{X}}(x)$. Wyznaczyć $f_{\mathbf{Y}}(y)$ dla zm. l. $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$.

Rozwiązanie:

$$y = ax + b, \quad \text{tzn.} \quad g(x) = ax + b$$

$$h(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

Ostatecznie

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{|a|} f_{\mathbf{X}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Przykład: Rezystancja R jest zm. l. o rozkładzie równomiernym między 900 i 1100 omów. Wyznaczyć gęstość $f_G(g)$ przewodności $G = \frac{1}{R}$.

Przykład: Rezystancja R jest zm. l. o rozkładzie równomiernym między 900 i 1100 omów. Wyznaczyć gęstość $f_G(g)$ przewodności $G = \frac{1}{R}$.

Ponieważ

$$f_R(r) = \frac{1}{200} \quad \text{dla} \quad 900 < r < 1100$$

mamy

$$f_R(g) = \frac{1}{200} \quad \text{dla} \quad \frac{1}{1100} < g < \frac{1}{900}$$

Stąd

$$f_G(g) = \frac{1}{200g^2} \quad \text{dla} \quad \frac{1}{1100} < g < \frac{1}{900}$$

Przykład: Detektor z charakterystyką kwadratową

$$\mathbf{Y} = a\mathbf{X}^2$$

Dla $y < 0$ równanie $y = ax^2$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, czyli $f_{\mathbf{Y}}(y) = 0$.

Jeśli $y > 0$ to istnieją dwa rozwiązania

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a}}$$

Stąd

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} (f_{\mathbf{X}}(\sqrt{\frac{y}{a}}) + f_{\mathbf{X}}(-\sqrt{\frac{y}{a}})) U(y)$$

gdzie $U(y)$ to skok jednostkowy.

Przykład: Prostownik dwupołkowy

$$\mathbf{Y} = |\mathbf{X}|$$

Dla $y < 0$ równanie $y = |x|$ nie ma rozwiązania.

Dla $y > 0$ mamy dwa rozwiązania

$$x_1 = y, \quad x_2 = -y \quad (37)$$

Stąd

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = [f_{\mathbf{X}}(y) + f_{\mathbf{X}}(-y)]U(y)$$

Przykład: $Y = a \sin(X + \phi)$ i $a > 0$

Jesli $|y| > a$ to równanie

$$y = a \sin(x + \phi)$$

nie ma rozwiązania rzeczywistego.

Dla $|y| < a$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań:

$$x_n = \arcsin \frac{y}{a} - \phi \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Wtedy

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_X(x_n)$$

dla $|y| < a$.

Dla $a = 1$ oraz

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{dla } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

mamy

$$f_Y(y) = \frac{2}{2\pi\sqrt{1-y^2}}$$

oraz

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(y) & |y| < 1 \\ 0 & y < -1 \end{cases}$$

Dla $|y| < a$ oraz $f_{\mathbf{X}}(x)$ dostatecznie gładkiej, by mogła być aproksymowana przez stałą w dowolnym przedziale o długości 2π , mamy

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Zadanie: Cząstka opuszcza punkt O pod działanie siły ciężkości g . Jej prędkość początkowa v tworzy kąt ϕ z osią poziomą Ox i jej trajektoria przecina oś Ox w punkcie B w odległości D od punktu O . Zakładamy, że v jest stałą i ϕ zm. l. o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(0, \pi/2)$. Oczywiście

$$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\phi$$

jest zmienną losową. Wyznaczyć:

1. gęstość $f_D(d)$
2. prawdopodobieństwo p , że D nie przekroczy wartości d_0 , gdzie $d_0 < \frac{v^2}{g}$

Rozwiązanie:

1. Przyjmując $\mathbf{X} = 2\phi$, $a = v^2/g$, mamy

$$D = a \sin(x)$$

gdzie \mathbf{X} to zm. l. o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \pi)$.
Jeśli $0 < d < a$ to równanie $d = a \sin(x)$ ma dwa rozwiązania w przedziale $(0, \pi)$

$$f_D(d) = \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - d^2}}$$

Rozwiązanie:

1. Przyjmując $\mathbf{X} = 2\phi$, $a = v^2/g$, mamy

$$D = a \sin(x)$$

gdzie \mathbf{X} to zm. l. o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \pi)$.
Jeśli $0 < d < a$ to równanie $d = a \sin(x)$ ma dwa rozwiązania w przedziale $(0, \pi)$

$$f_D(d) = \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 - d^2}}$$

2.

$$p = P(D \leq d_0) = F_D(d_0) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{d_0}{a} \quad (38)$$