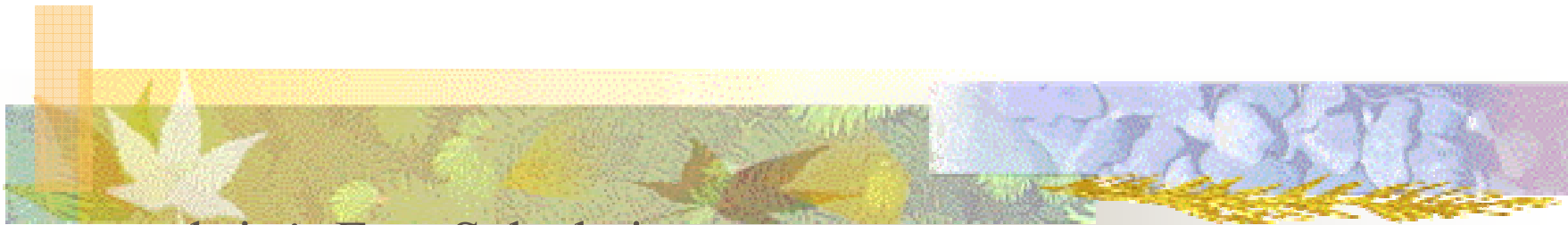


METODY NUMERYCZNE I OPTYMALIZACJA



dr inż. Ewa Szlachcic

Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki

Politechnika Wrocławska

pok. 219 C-3



Program wykładu

- Wprowadzenie do zagadnień optymalizacji
- Przykłady praktycznych zadań optymalizacji
- Definicja zadania optymalizacji
- Klasyfikacja zadań optymalizacji
- Programowanie liniowe PL
- Programowanie nieliniowe PN

➤ **Programowanie liniowe.** Podstawy teoretyczne PL. Warunki konieczne i dostateczne optymalizacji liniowej. Metody simpleks, dwufazowy simpleks, dualny simpleks. Inne algorytmy liniowe. Programowanie liniowe ze zmiennymi rzeczywistymi, programowanie liniowe ze zmiennymi dyskretnymi.

w tym:

Programowanie całkowitoliczbowe liniowe

Metody odcięć. Metody podziału i ograniczeń. Klasyczne zadania optymalizacji dyskretniej (problem plecakowy, przydziału, komiwojażera, problemy szeregowania zadań.), przepływy w sieciach i zadania transportowe.

➤ **Programowanie nieliniowe.** Podstawy teoretyczne PN. Warunki konieczne i wystarczające optymalności. Metody dokładne i heurystyczne (m.in.. genetyczne i ewolucyjne) poszukiwania ekstremum bez ograniczeń i z ograniczeniami.

Sformułowanie zadania optymalizacji

Wektor zmiennych decyzyjnych \mathbf{x} :

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$


gdzie: n – ilość zmiennych decyzyjnych.

Funkcja celu (funkcja kryterialna) $f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1$$

oraz m funkcji ograniczeń $g_i(\mathbf{x})$:

$$g_i(\mathbf{x}): R^n \longrightarrow R^1 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, m$$



Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych \mathbf{x} , należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych X w postaci:

$$X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

takiego, że dla $\forall \mathbf{x} \in X$

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

Przykłady praktycznych zastosowań:

- ☐ **Optymalne projektowanie procesów technologicznych**
- ☐ **Optymalne zarządzanie przedsiębiorstwem**
- ☐ **Poliopptymalne zadanie dla modelu gospodarki narodowej (np.: maksymalizacja konsumpcji i środków trwałych oraz minimalizacja poziomu zadłużenia zagranicznego gospodarki)**
- ☐ **Optymalne sterowanie procesem technologicznym**
- ☐ **projektowanie optymalnej struktury systemu (np. sieci komputerowej)**
- ☐ **Projektowanie optymalnego przepływu w sieciach (sieci dystrybucji wody, sieci dystrybucji gazu, sieci komputerowe)**
- ☐ **Minimalizacja kosztów, maksymalizacja zysków w przedsiębiorstwie**
- ☐ **Zadania optymalnego przydziału**
- ☐ **Zadania optymalnego rozmieszczenia (minimalizacja strat czy odpadów- optymalny rozkrój , optymalne cięcie, optymalny kształt)**

Zadanie programowania liniowego PL

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach: $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\dim \mathbf{x} = n, \dim \mathbf{c} = n$$

Macierze $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ odpowiadają za współczynniki w m_1 i m_2 ograniczeniach

$$\dim \mathbf{A}_1 = [m_1 \times n], \dim \mathbf{A}_2 = [m_2 \times n]$$

Wektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ odpowiadają za prawe strony ograniczeń

$$\dim \mathbf{b}_1 = m_1, \dim \mathbf{b}_2 = m_2$$

Zadanie wyznaczania optymalnego ukształtowania autostrady

- Koszt budowy jest proporcjonalny do ilości podłoża dodawanego lub usuwanego
- T – długość drogi, $c(t)$ – wysokość terenu dla każdego
- Autostrada będzie budowana na nierównym terenie
- Należy wyznaczyć wysokość drogi $y(t)$ dla $\forall t \in [0, T]$

Założenia:

- ❖ Warunki początkowe trasy: $y(0) = a$
- ❖ Warunki końcowe trasy: $y(T) = b$
- ❖ Maksymalne nachylenie nie może przekraczać b_1 dla uniknięcia nadmiernych spadków: $|y'(t)| \leq b_1$
- ❖ Należy graniczyć szybkość zmian nachylenia drogi (wyeliminowanie garbów na jezdni):
 $|y''(t)| \leq b_2$

Zadanie wyznaczania optymalnego ukształtowania autostrady

$y(t)$

$$\min \int_0^T |y(t) - c(t)| dt$$

Przy ograniczeniach:

$$|y(t)| \leq b_1 \quad \text{dla } t \in [0, T]$$

$$|\ddot{y}(t)| \leq b_2 \quad \text{dla } t \in [0, T]$$

$$y(0) = a$$

$$y(b) = T$$



Zadanie programowania kwadratowego

$$\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = 0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

gdzie:

$$X = \{ \mathbf{x} : \mathbf{D}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{e}, \mathbf{x} \geq 0 \}$$



Przykład zadania programowania nieliniowego

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

przy ograniczeniach:

$$x_1^2 \leq x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$