



Przykład zadania programowania nieliniowego

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

przy ograniczeniach:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq x_1^2$$



## Zadanie programowania kwadratowego

$$\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = 0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

gdzie:

$$X = \{ \mathbf{x} : \mathbf{D}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{e}, \mathbf{x} \geq 0 \}$$



Przykład zadania programowania kwadratowego

$$\min f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

przy ograniczeniach:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

## Przykład I Zadanie wyznaczania optymalnego ukształtowania autostrady

- Koszt budowy jest proporcjonalny do ilości podłoża dodawanego lub usuwanego
- $T$  – długość drogi,  $c(t)$  – wysokość terenu dla każdego  $t \in [0, T]$
- Autostrada będzie budowana na nierównym terenie
- Należy wyznaczyć wysokość drogi  $y(t)$  dla  $\forall t \in [0, T]$

Założenia:

- ❖ Warunki początkowe trasy:  $y(0) = a$
- ❖ Warunki końcowe trasy:  $y(T) = b$
- ❖ Maksymalne nachylenie nie może przekraczać  $b_1$  dla uniknięcia nadmiernych spadków:

$$|y'(t)| \leq b_1$$

- ❖ Należy graniczyć szybkość zmian nachylenia drogi (wycinanie garbów na jezdni):

$$|y''(t)| \leq b_2$$



Zadanie wyznaczania optymalnego ukształtowania autostrady

$y(t)$

$$\min \int_0^T |y(t) - c(t)| dt$$

Przy ograniczeniach:

$$|y(t)| \leq b_1 \quad dla \ t \in [0, T]$$

$$|\ddot{y}(t)| \leq b_2 \quad dla \ t \in [0, T]$$

$$y(0) = a$$

$$y(b) = T$$

## Przekształcenie zadania:

### Założenia:

- drogę należy podzielić na  $K$  równych odcinków o długości  $l$ ,  $k=1,...,K$
- zmienna sterująca:  $u(t)=y(t)-c(t)$
- zmienna modelu dynamicznego:  $x(t) = \dot{y}(t)$

Przyjmując oznaczenia:  $y_1 = y$ ,  $y_2 = \dot{y}$   
 $c(k) = c_k$ ,  $y_1(k) = y_{1,k}$ ,  $y_2(k) = y_{2,k}$

Zadanie optymalizacji statycznej:  $\min \sum_{k=1}^K |y_{1,k} - c_k|$

przy ograniczeniach:  $y_{1,k} - y_{1,k-1} = y_{2,k-1}$        $y_{1,0} = a$        $y_{2,k} = b$

$$-b_1 \leq y_{2,k} \leq b_1$$

$$-b_2 \leq y_{2,k} - y_{2,k-1} \leq b_2$$

Powstało zadanie optymalizacji liniowej z ograniczeniami większościowymi i mniejszościowymi.

## Przykład I. Zadania sterowania siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

Dana jest sieć dystrybucji wody w postaci:

- $m$ - węzłów,
- $s$  - odbiorców z odpowiednimi potrzebami, w których utrzymywane jest odpowiednie ciśnienie oraz  $n$  łuków,  $\sigma \in R^s$
- każdy łuk „ $i$ ” charakteryzuje się przepływem  $y_i$ :  $y \in R^n$

Opis sieci:

- spadek ciśnienia  $x_i$  na łuku „ $i$ ”:  $x \in R^n$   $x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$   
gdzie:  $r_i$ - opór hydrauliczny łuku „ $i$ ”  
 $d_i$ - różnica wysokości geodezyjnych łuku „ $i$ ”

Ograniczenia wynikające ze struktury sieci:

I prawo Kirchhoff’a:  $A y = \sigma$

$A$  – macierz incydencji dla węzłów sieci wodociągowej,

II prawo Kirchhoff’a:

$$B x = 0$$

$B$  – macierz oczkowa dla węzłów sieci wodociągowej.



## Sterowanie siecią dystrybucji wody minimalizujące zużycie energii elektrycznej

$$\min f(y) = \sum_{i=1}^n f_i(y_i)$$

gdzie:

$$f_i(y_i) = x_i y_i = r_i y_i^3 \operatorname{sgn} y_i + d_i y_i$$

przy ograniczeniach:

$$A y = \sigma$$

$$B x = 0$$

$$x_i = r_i y_i^2 \operatorname{sgn} y_i + d_i$$

$$y \in R^n \quad x \in R^n \quad \sigma \in R^s$$



Przykład II: Znaleźć najlepszą liniową aproksymację nieznanej funkcji określonej poprzez tabelę 20 pomiarów.

Wyznaczyć optymalne wartości wektora współczynników  $b=[b_1, b_2, b_3, b_4]$  formy liniowej :

$$y = b^T u$$

gdzie:  $u$  - wektor wielkości sterujących,  $y$  - wektor wielkości wyjściowych

Dane: tabela z 20 pomiarami wektora  $u$  wielkości sterujących oraz wektora wielkości wyjściowych  $\tilde{y}_i$   $i = 1, \dots, 20$

dla następujących kryteriów jakości:

1. minimum sumy wartości bezwzględnych różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:

$$\min [f(b) = \sum_{i=1}^{20} |\tilde{y}_i - y_i(b)|]$$

gdzie:  $y_i(b)$  - wartości zmierzone wielkości wyjściowych

$i=1, \dots, 20$  - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie

modelu

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

**Zadanie trudne do rozwiązania, ponieważ funkcja celu jest nie-różniczkowalna.**

## Równoważne zadanie programowania liniowego

➤ Wprowadzono nową zmienną:  $z_i = |\tilde{y}_i - y_i(b)|$

Ø Zwiększenie wymiaru zadania: 24 zmienne niezależne

$$\min f(b) = \sum_{i=1}^{20} z_i$$

przy ograniczeniach:

$$-z_i \leq \tilde{y}_i - b_1 u_{1i} - b_2 u_{2i} - b_3 u_{3i} - b_4 u_{4i} \leq z_i$$

dla  $i=1, \dots, 20$

Zadanie programowania liniowego:

Ø funkcja celu jest wypukła

Ø rozwiązano metodą dwufazową simpleks.

**Wektor b optymalnych współczynników :**

$$b_1 = 51,87 \quad b_2 = 1,232 \quad b_3 = -0,122 \quad b_4 = -1,08$$

## Drugie kryterium jakości.

**2. minimum sumy kwadratów różnic między wartościami wektora wyjść a wartościami otrzymanymi z modelu liniowego:**

$$\min [f(b) = \sum_{i=1}^{20} (\tilde{y}_i - y_i(b))^2]$$

**gdzie:**  $\tilde{y}_i$   $i=1,\dots,20$  - wartości zmierzone wielkości wyjściowych

$y_i(b)$  -  $i=1,\dots,20$  - wielkości wyjściowe obliczone na podstawie modelu

$$y_i(b) = b_1 u_{1i} + b_2 u_{2i} + b_3 u_{3i} + b_4 u_{4i}$$

**Zadanie programowania nieliniowego:**

- **funkcja celu jest wypukła**
- **rozwiązano metodą gradientów sprzężonych w wersji Polak'a-Ribiere'y.**

$$b_1 = 39,28 \quad b_2 = 1,07 \quad b_3 = 0,16 \quad b_4 = -0,94$$

**Wyniki identyfikacji zależą od wyboru kryterium optymalizacji i przyjętej dokładności obliczeń.**

Metody numeryczne i optymalizacja  
Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki PWr  
AiR III r.

Zadanie programowania ilorazowego:

$$\text{extr } f(x) = \frac{c^T x}{d^T x}$$

$$f: X \rightarrow R^1$$

przy ograniczeniach:

$$c \geq 0, d \geq 0, x \geq 0$$

oraz

$$c \in R^n \quad d \in R^n \quad x \in R^n$$

$$Ax \leq b$$


$$\dim A = [m \times n]$$

$$b \in R^m$$



## Przykłady praktycznych zastosowań:

- ❑ **Optymalne projektowanie procesów technologicznych**
- ❑ **Optymalne zarządzanie przedsiębiorstwem**
- ❑ **Poli-optymalne zadanie dla modelu gospodarki narodowej (np.: maksymalizacja konsumpcji i środków trwałych oraz minimalizacja poziomu zadłużenia zagranicznego gospodarki)**
- ❑ **Optymalne sterowanie procesem technologicznym**
- ❑ **projektowanie optymalnej struktury systemu (np. sieci komputerowej)**
- ❑ **Projektowanie optymalnego przepływu w sieciach ( sieci dystrybucji wody, sieci dystrybucji gazu, sieci komputerowe)**
- ❑ **Minimalizacja kosztów, maksymalizacja zysków w przedsiębiorstwie**
- ❑ **Zadania optymalnego przydziału**
- ❑ **Zadania optymalnego rozmieszczenia ( minimalizacja strat czy odpadów- optymalny rozkrój , optymalne cięcie, optymalny kształt)**



Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu wektora zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x}$ , należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych  $X$  w postaci:

$$X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

takiego, że dla

$$\forall \mathbf{x} \in X$$

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$$

Co jest równoznaczne zapisowi:

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}})$$

Punkt  $\hat{\mathbf{x}}$  - minimum globalne funkcji  $f(\mathbf{x})$  na zbiorze  $X$