

Przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych

- **Metoda bisekcji**
- **Metoda siecznych**
- **Metoda stycznych (Newtona)**
- **Metoda kolejnych przybliżeń**

Twierdzenie Bolzano-Cauchy' ego

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ i

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

To między punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania

$$f(x) = 0$$

Twierdzenie o przedziale izolacji pierwiastka

Jeżeli w przedziale $[a,b]$ są spełnione założenia twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego i dodatkowo $\operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{const}$ dla $x \in [a,b]$ to przedział ten jest przedziałem izolacji pierwiastka równania $f(x)=0$.

Metoda bisekcji

Przedział izolacji pierwiastka $[a,b]$ dla równania $f(x) = 0$.

Kolejne przybliżenia:

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_k}{2}, k \in [1, (i-2)], i = 3, 4, \dots$$

Dokładność i-tego przybliżenia:

$$|x_i - x^*| < \frac{b-a}{2^i}$$

Przykład: dla $d_1=0$ i $d_2=7$ oblicz pierwiastek równania $f(d)=0$

$$1,5d^3 - 240d + 537,5 = 0$$

Metoda siecznych – metoda zbieżna

Założenie: funkcja $f(x)$ klasy C^2 w przedziale izolacji pierwiastka.

Do wyznaczenia $i+1$ przybliżenia:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})} (x_i - x_{i-1}).$$

Błąd bezwzględny przybliżenia x_i

$$f(x_i) - f(\alpha) = f'(c)(x_i - \alpha)$$

C jest zawarte w przedziale o końcach x_i i α . Ponieważ $f(\alpha)=0$

$$|x_i - \alpha| \leq \frac{|f(x_i)|}{m}$$

Gdzie: $m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$

Oszacowanie błędu w niewielkim otoczeniu pierwiastka α można aproksymować:

$$|\alpha - x_i| \approx \left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right| \approx \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right| \cdot |f(x_i)|$$

$$\delta_i \leq \left| \frac{f(x_i)}{f'(a)} \right| \text{ lub } \delta_i \leq \left| \frac{f(x_i)}{f'(b)} \right|$$

Metoda Newtona (stycznych) – metoda zbieżna

Założenie: funkcja $f(x)$ klasy C^2 w przedziale izolacji pierwiastka.

Rozwinięcie w szereg Taylora wokół przybliżonego pierwiastka równania

$$f(x_{i+1}) = 0 \qquad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx}(x_{i+1} - x_i)$$
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{df(x_i)}{dx}}$$

Jeżeli druga pochodna w przedziale izolacji nie ma stałego znaku, to proces iteracyjny może być rozbieżny.

Oszacowanie błędu w niewielkim otoczeniu pierwiastka α można aproksymować:

$$|\alpha - x_i| \approx \left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right|$$
$$\delta_i \leq \left| \frac{f(x_i)}{f'(a)} \right| \text{ lub } \delta_i \leq \left| \frac{f(x_i)}{f'(b)} \right|$$

Twierdzenie o stycznych

Jeżeli dany jest przedział $\langle a, b \rangle$ taki, że:

- (i) wartości $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki,
- (ii) funkcja $f''(x)$ jest ciągła i nie zmienia znaku na $\langle a, b \rangle$
- (iii) Styczne do krzywej $y=f(x)$ poprowadzone w punktach o odciętych a i b przecinają oś X wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$, wówczas równanie

$$f(x) = 0$$

Ma dokładnie jeden pierwiastek α w przedziale $\langle a, b \rangle$ i metoda Newtona jest zbieżna do α dla dowolnego punktu startowego

$$x_0 \in \langle a, b \rangle$$