

Ćwiczenie 12

Prawa autorskie zastrzeżone:
Zakład Teorii Obwodów PWr

PRZEKSZTAŁCENIE CAŁKOWE FOURIERA

Celem ćwiczenia jest:

- wyznaczenie charakterystyki jednostkowej $k(t)$ na podstawie charakterystyki widmowej $H(j\omega)$,
- obserwacja zmiany kształtu reakcji jednostkowej w zależności od szerokości pasma filtru dolnoprzepustowego o regulowanej szerokości pasma przepustowego,

W ćwiczeniu należy:

- zmierzyć część rzeczywistą funkcji transmitancji zwaną rzeczywistą charakterystyką widmową $V(\omega)$ badanego układu,
- wyznaczyć charakterystykę jednostkową $k(t)$ na podstawie $V(\omega)$,
- zaobserwować na ekranie oscyloskopu reakcję filtru o regulowanej szerokości pasma na pobudzenie jednostkowe.

A. Wprowadzenie

1. Wstęp

Funkcja transmitancji $H(s)$ określa wszystkie właściwości transmisyjne układu przy dowolnym pobudzeniu i zerowych warunkach początkowych. W wielu zastosowaniach praktycznych zarówno w analizie, jak i syntezie obwodów wykorzystuje się charakterystykę częstotliwościową układu, tj. funkcję transmitancji na osi urojonej, czyli dla $s = j\omega$.

Charakterystyka częstotliwościowa układu ściśle stabilnego może być zapisana w postaci:

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{P(j\omega)} = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} = V(\omega) + jX(\omega), \quad (1)$$

gdzie:

$R(\omega)$ – transformata Fouriera odpowiedzi,

$P(\omega)$ – transformata Fouriera pobudzenia,

$A(\omega)$ – charakterystyka amplitudowa,

$\theta(\omega)$ – charakterystyka fazowa,

$V(\omega)$ – rzeczywista charakterystyka,

$X(\omega)$ – urojona charakterystyka.

Między $A(\omega)$, $\theta(\omega)$, $V(\omega)$, $X(\omega)$ istnieją określone [1] związki.

W szczególności możliwe jest wyznaczenie charakterystyki jednostkowej $k(t)$ na podstawie części rzeczywistej $V(\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\}$ zwanej rzeczywistą charakterystyką widmową.

Wykorzystywana w ćwiczeniu metoda wyznaczania reakcji jednostkowej układu $k(t)$ na podstawie aproksymacji rzeczywistej charakterystyki widmowej opracowana została przez W. W. Sołodownikowa i przedstawiona w skrócie w [2].

2. Wyznaczenie charakterystyki impulsowej na podstawie charakterystyki widmowej układu

Niech rzeczywista równa zero dla $t < 0$ funkcja $h(t)$ będzie charakterystyką impulsową układu ściśle stabilnego. Jej transformata Fouriera jest dana zależnością:

$$F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = H(j\omega), \quad (2)$$

a transformata odwrotna

$$F^{-1}\{H(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = h(t). \quad (3)$$

Zapisując

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = V(\omega) + jX(\omega) \quad (4)$$

i uwzględniając związek

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t), \quad (5)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} h(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [V(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)] d\omega + \\ & \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [V(\omega)\sin(\omega t) + X(\omega)\cos(\omega t)] d\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Po rozpisaniu całek w (6) dla dodatnich i ujemnych wartości argumentu i wykorzystaniu właściwości funkcji układu:

$$V(-\omega) = V(\omega), \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad (7)$$

otrzymuje się

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [V(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)] d\omega. \quad (8)$$

Dla $t < 0$ z przyczynowości charakterystyki impulsowej wynika

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [V(\omega)\cos(\omega t) + X(\omega)\sin(\omega t)] d\omega = 0. \quad (9)$$

Dodając lub odejmując stronami (8) i (9) otrzymuje się ostatecznie

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V(\omega)\cos(\omega t) d\omega; \quad t > 0 \quad (10)$$

lub

$$h(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega; t > 0. \quad (11)$$

3. Wyznaczenie charakterystyki jednostkowej na podstawie aproksymacji rzeczywistej charakterystyki widmowej układu

Transformata Fouriera charakterystyki jednostkowej powiązana jest z charakterystyką widmową układu następującą zależnością:

$$F\{k(t)\} = \frac{H(j\omega)}{j\omega} \quad (12)$$

Tak więc

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{H(j\omega)}{j\omega}\right\} = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = -\frac{V(\omega)}{\omega} \quad (13)$$

i z wzoru (11)

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} V(\omega) d\omega. \quad (14)$$

Mierzając zatem

$$V(\omega) = A(\omega) \cos(\theta(\omega)), \quad (15)$$

na podstawie (14) można wyznaczyć charakterystykę jednostkową układu.

Istota wspomnianej metody W. Sołodownika [2] polega na graficznej aproksymacji charakterystyki $V(\omega)$. Jeżeli $V(\omega)$ rozłoży się na trapezy, tak jak to pokazano na rys. 1, otrzymuje się

$$V(\omega) \cong \sum_{i=1}^n r_i(\omega), \quad (16)$$

gdzie

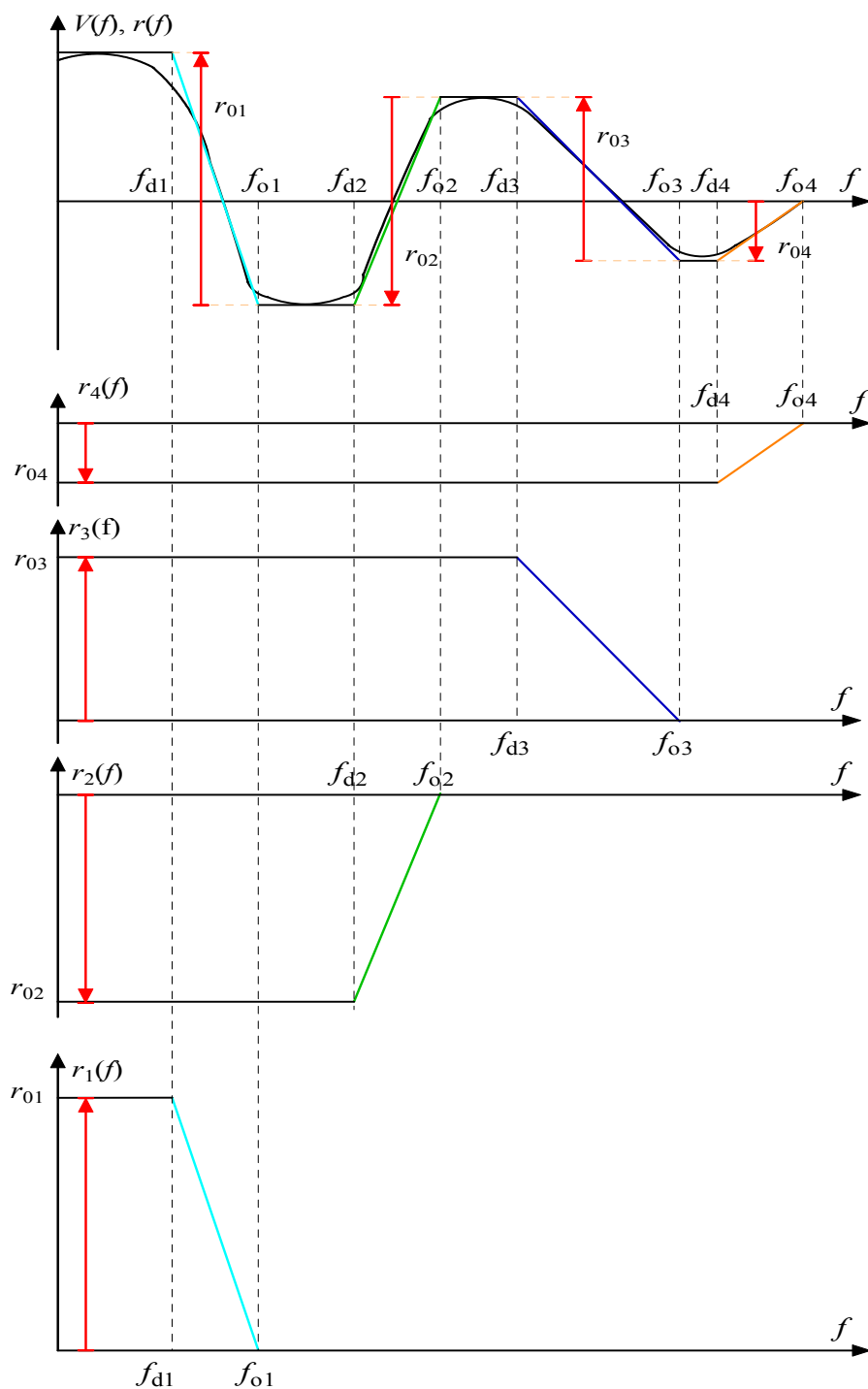
$$r_i(\omega) = \begin{cases} r_{oi} & dla \quad 0 < \omega < \omega_{di}, \\ r_{oi} \frac{\omega_{oi} - \omega}{\omega_{oi} - \omega_{di}} & dla \quad \omega_{di} < \omega < \omega_{oi}, \\ 0 & dla \quad \omega_{oi} < \omega. \end{cases} \quad (17)$$

Uwaga

$V(\omega)$ jest sumą algebraiczną, czyli zgodnie z rys. 1

$$V(\omega) \cong r_1(\omega) + r_2(\omega) + r_3(\omega) + r_4(\omega). \quad (18)$$

Aproksymację należy prowadzić w taki sposób, aby pola pod krzywą rzeczywistą i wynikającą z aproksymacji były w przybliżeniu równe przy identycznych wartościach maksymalnych funkcji aproksymowanej i aproksymującej. Liczba aproksymujących trapezów może być dowolnie duża. Zaleca się w ćwiczeniu, aby do aproksymacji otrzymanej rzeczywistej charakterystyki widmowej użyć od 5 do 10 trapezów. W ćwiczeniu praktyczniej jest używać zamiast pulsacji ω częstotliwość f . Każdy trapez określony jest trzema parametrami (r_i , f_{di} , f_{oi}), które należy wyznaczyć ze zmierzonej charakterystyki $V(f)$. Kolejne trapezy mogą mieć parametry $f_{di-1} = f_{oi}$.



Rys. 1

Podstawiając (16) do (14) otrzymuje się

$$k(t) \cong \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} r_i(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (19)$$

i po uwzględnieniu (17)

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n r_{oi} \left[\int_0^{\omega_{di}} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega + \int_{\omega_{di}}^{\omega_{oi}} \frac{\omega_{oi} - \omega}{\omega_{oi} - \omega_{di}} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n r_{oi} \left\{ \begin{aligned} &Si(\omega_{di} t) + \frac{\omega_{oi}}{\omega_{oi} - \omega_{di}} [Si(\omega_{oi} t) - Si(\omega_{di} t)] + \\ &+ \frac{1}{\omega_{oi} - \omega_{di}} \frac{\cos(\omega_{oi} t) - \cos(\omega_{di} t)}{t} \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie

$$Si(\omega_k t) = \int_0^{\omega_k} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \text{ - sinus całkowity} \quad (21)$$

Po wprowadzeniu

$$\tau = \omega_{oi} t \quad (22)$$

oraz parametru

$$H_i = \frac{\omega_{di}}{\omega_{oi}} \quad (23)$$

wzór (20) zapisuje się ostatecznie w postaci

$$k_H(t) = \sum_{i=1}^n k_{H_i}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n r_{oi} \left\{ Si(H_i \tau) + \frac{1}{1-H_i} \left[Si(\tau) - Si(H_i \tau) + \frac{\cos(\tau) - \cos(H_i \tau)}{\tau} \right] \right\}. \quad (24)$$

4. Zależność między czasem narastania reakcji jednostkowej a częstotliwością graniczną filtru

Z własności przekształcenia Fouriera wynika, że

$$\mathcal{F} \left\{ k \left(\frac{t}{a} \right) \right\} = a \frac{H(ja\omega)}{ja\omega} = \frac{H(ja\omega)}{j\omega}. \quad (25)$$

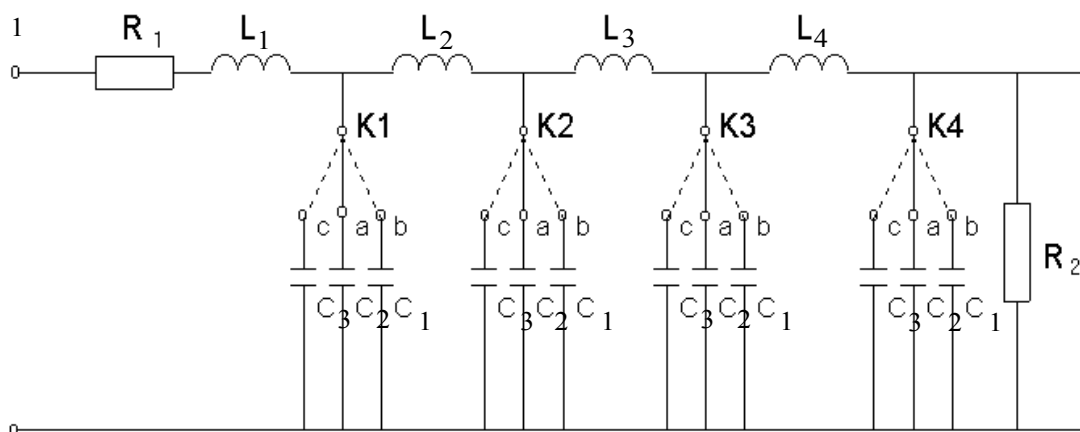
Oznacza to, że zmianie skali czasu odpowiada odwrotna zmiana skali częstotliwości. Mówiąc inaczej, im mniejsza częstotliwość graniczna filtru, tym dłuższy czas narastania reakcji jednostkowej.

Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:

- analizator transmitancji typ 272,
- oscyloskop z transmisją szeregową do komputera,
- generator funkcyjny,
- woltomierz.

Schemat badanego układu przedstawiono na rys. 2



Rys.2

5. Zmierzyć rzeczywistą charakterystykę widmową filtru ($H(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ - jest wzmocnieniem napięciowym) zgodnie z instrukcją obsługi miernika transmitancji, a wyniki przedstawić w postaci wykresu w skali liniowej. Posłużyć się papierem milimetrowym A4.

6. Dokonać aproksymacji rzeczywistej charakterystyki widmowej trapezami, tak jak to pokazano na rys. 1. Dla każdego trapezu określić charakterystyczne parametry r_{oi} , f_{di} , f_{oi} (pamiętać, że r_{oi} może być ujemne).

7. Uruchomić program komputerowy "pcf" działający w środowisku Matlab®, wprowadzić wielkości charakterystyczne do programu i wydrukować charakterystykę jednostkową filtru. Program wykorzystuje zależność (20).

8. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu, następnie wydrukować charakterystykę jednostkową filtru i porównać ją z charakterystyką otrzymaną w p.3.

9. Zmieniając szerokość pasma filtru, obserwować na ekranie oscyloskopu kształt charakterystyk jednostkowych, wyznaczyć czasy narastania t_n dla trzech różnych szerokości pasma.

Wyznaczyć częstotliwości f_s spadku wzmocnienia o 6 dB badanych w p. 5 filtrów w następujący sposób:

- dołączyć generator napięcia sinusoidalnego do wejścia filtru (wstępnie napięcie generatora powinno być równe około 1 V),
- dobrać tak napięcie generatora, aby na wyjściu filtru uzyskać napięcie odpowiadające 0 dB (wykorzystując do tego celu woltomierz V - 640 – skala w **dB**) przy częstotliwości z przedziału 20 – 100 Hz,
- zmieniając częstotliwość generatora zaobserwować spadek napięcia wyjściowego o 6 dB; odczytać częstotliwość f_s , przy której miał miejsce ten spadek,
- obliczyć iloczyn $t_n f_s$ dla trzech badanych filtrów; wyciągnąć odpowiednie wnioski.

10. Zwiększając częstotliwość powtarzania impulsów obserwować zmiany reakcji filtru na pobudzenie falą prostokątną. Charakterystyczne reakcje wydrukować.

Pytania kontrolne

1. Znana jest funkcja widmowa układu $H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + 2j\omega}$.
Wyznaczyć amplitudową i fazową charakterystykę.
2. Znana jest funkcja widmowa układu $H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + 2j\omega}$.
Wyznaczyć rzeczywistą i urojoną charakterystykę widmową.
3. Podać kryterium Paleya-Wienera realizowalności układu.
4. Podać związek transformaty Fouriera z transformatą Laplace'a.
5. Wymień podstawowe twierdzenia określające najważniejsze właściwości przekształcenia Fouriera.

6. Impuls prostokątny określony jest następująco: $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dla } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Wyznaczyć widmo amplitudowe tego impulsu.

7. Impuls trójkątny określony jest następująco:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć widmo amplitudowe tego impulsu.

8. Pokazać, że $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, gdzie $*$ oznacza spłot funkcji.
9. Narysować impulsy $\Pi\left(\frac{t-4}{8}\right)$, $\Lambda\left(\frac{t-4}{8}\right)$ i wyznaczyć ich transformaty Fouriera wykorzystując podstawowe właściwości przekształcenia.
10. Na wejście filtru idealnego, którego funkcja transmitancji jest określona za pomocą zależności: $H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \text{dla } |\omega| < 1 \\ 0 & \text{dla } |\omega| > 1 \end{cases}$ podano skok jednostkowy $1(t)$. Wyznaczyć i naszkicować reakcję układu.

Literatura

- [1] Uruski M., Wolski W., Teoria obwodów II, skrypt PWr., Wrocław 1984.
- [2] Krasowski A. A., Pospiełowski G. S., Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej, Warszawa, WNT, 1985.

Instrukcja obsługi analizatora transmitancji typ 272

Przygotowanie przyrządu do pomiaru i pomiar

1. Sprawdzić, czy jest wciśnięty klawisz 0.8 Hz przełącznika SELECTIVITY. Włączyć zasilanie klawiszem MAINS. Żarówki wskaźnika ćwiartki i pokręteł nastawy częstotliwości powinny się świecić. Wskazane jest włączanie zasilania przy nastawie częstotliwości większej niż 10 Hz.
2. Ustalić żadaną częstotliwość za pomocą pokręteł dekadowych i 4-ro klawiszowego przełącznika zakresów częstotliwości.
3. Odczekać kilka minut na ustabilizowanie się warunków pracy analizatora.
4. Sprawdzić zerowanie mierników wychyłowych przy wciśniętym klawiszu GENER. OUTPUT MEASUR.; klawisze przełącznika rodzaju sygnału powinny znajdować się w położeniu spoczynkowym. Po poprawnym wyzerowaniu mierników żarówki wskaźnika ćwiartki powinny migotać lub świecić się równocześnie.
5. Weisnąć klawisz "L" i za pomocą regulacji AMPLITUDE oraz przełącznika tłumika wyjściowego ustalić żadane napięcie wyjściowe (odczyt na mierniku R).
6. Pomiedzy wyjście generatora i wejście pomiarowe analizatora włączyć badany układ. Wskazania wskaźnika ćwiartki będą poprawne tylko wówczas, gdy sygnał z zacisku wyjściowego H zostanie doprowadzony poprzez badany układ do zacisku wejściowego H. To samo dotyczy zacisków L. W przypadku skrzyżowania połączeń do wskazań wskaźnika ćwiartki należy dodać lub odjąć π .
7. Dobrać właściwy zakres czułości i zwolnić klawisz GENER. OUTPUT MEASUR. W przypadku dokonywania pomiarów z dużą dokładnością ponownie wyzerować mierniki zwalniając klawisz "~".
8. Pozostałe informacje powinny być dostępne na stanowisku pomiarowym.