

Zad. 1. Znana jest funkcja widmowa układu $H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + 2j\omega}$.

Wyznaczyć amplitudową i fazową oraz rzeczywistą i urojoną charakterystykę widmową.

Zad. 2. Impuls prostokątny określony jest następująco: $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dla } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Wyznaczyć widmo amplitudowe tego impulsu.

Zad. 3 Impuls trójkątny określony jest następująco:

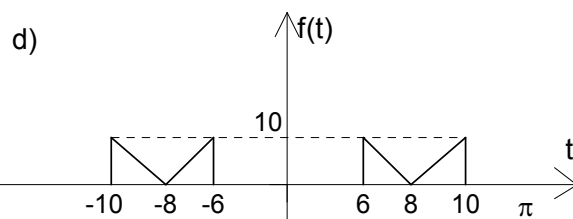
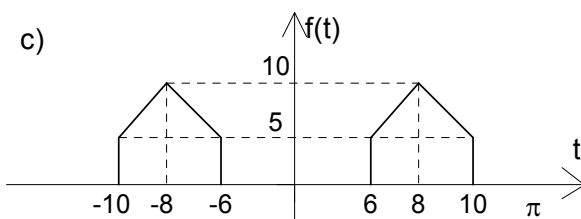
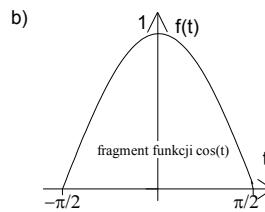
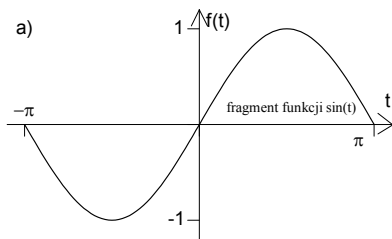
$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla } |t| < 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

Wyznaczyć widmo amplitudowe tego impulsu.

Pokazać, że $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, gdzie $*$ oznacza splot funkcji.

Zad. 4 Narysować impulsy $\Pi\left(\frac{t-4}{8}\right)$, $\Lambda\left(\frac{t-4}{8}\right)$ i wyznaczyć ich transformaty Fouriera wykorzystując podstawowe właściwości przekształcenia.

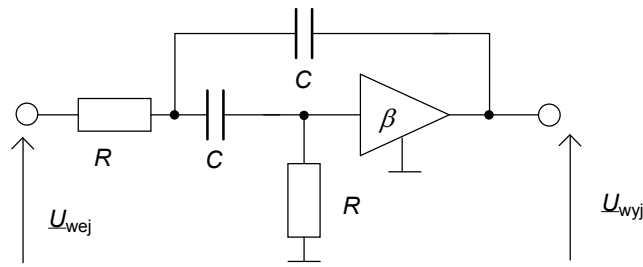
Zad. 5 Wyznaczyć transformaty Fouriera poniższych funkcji.



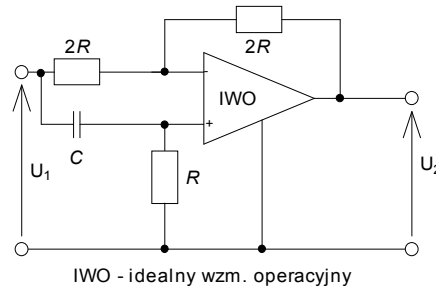
Zad. 6 Wykorzystując podstawowe właściwości transformaty Fouriera wyznaczyć transformaty funkcji:

- a) $f(t) = 10e^{-2|t|}$, b) $f(t) = Ae^{-at}1(t), (a > 0)$, c) $f(t) = te^{-at}1(t), (a > 0)$,
d) $f(t) = \sin(t)[1(t) - 1(t - 2n\pi)]$, n – liczba naturalna.

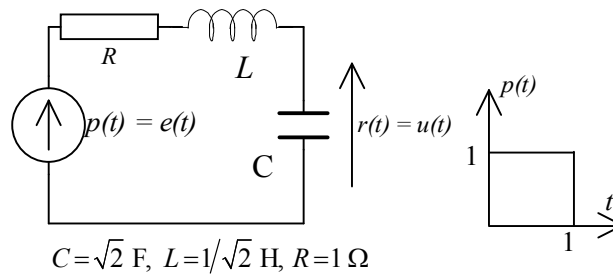
Zad. 7 Wyznaczyć $H(j\omega) = \frac{U_{wyj}}{U_{wej}}$, następnie charakterystykę amplitudową $|H(j\omega)|$ i fazową $\{\arg\{H(j\omega)\}\}$ układu narysowanego poniżej. Dane: $C = 1 \text{ F}$, $R = 1 \Omega$, $\beta = -2$.



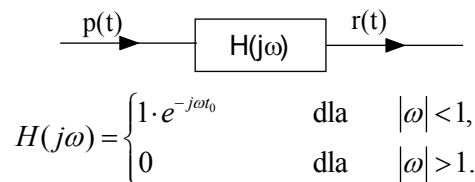
Zad. 8 Dla układu przedstawionego poniżej wyznaczyć funkcję transmitancji $T(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$.



Zad. 9 Obliczyć widmo amplitudowe sygnału $r(t)$.



Zad. 10 Sygnał $p(t) = 2e^{-t}1(t)$ został podany na wejście idealnego filtra dolnoprzepustowego (rys. poniżej):



t_0 - parametr

Wyznaczyć energię sygnału na wejściu i wyjściu filtra.

Zad. 10 Dany jest sygnał $f(t) = e^{-a|t|}$. Określić szerokość zajmowanego przez ten sygnał pasma, w którym zawarte jest 99% energii sygnału.

Zad. 11 Czy istnieje układ o charakterystyce widmowej $H(j\omega) = \frac{a}{\omega^2 + b^2}$, $a > 0$.

Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie

Ad. 1

Charakterystyka amplitudowa: $A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \frac{1}{1+\omega^2}$.

Charakterystyka fazowa : $\arg\{H(j\omega)\} = -\left(\frac{\pi}{2}\text{sign}(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega^2 - 1}{2\omega}\right)\right)$.

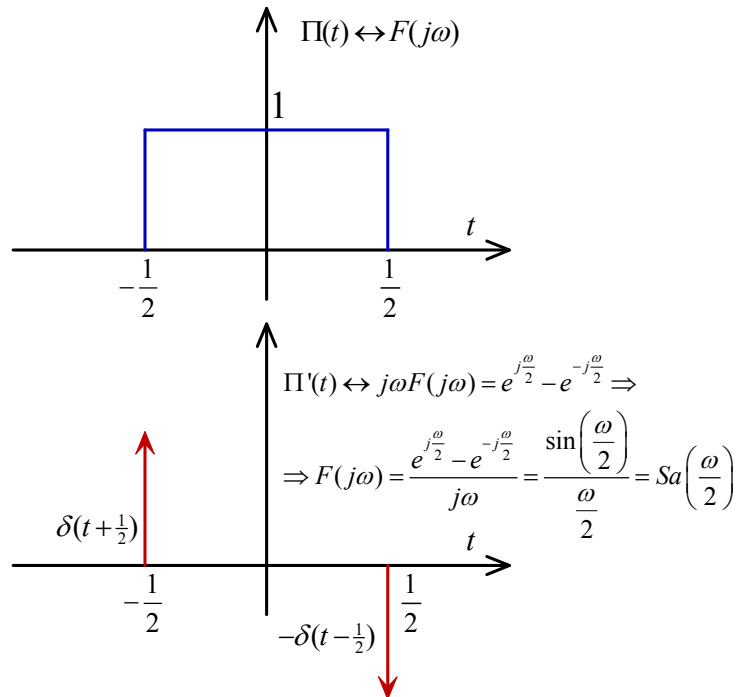
Rzeczywista charakterystyka widmowa : $V(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega)\} = \frac{1 - \omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$.

Urojona charakterystyka widmowa : $X(j\omega) = \text{Im}\{H(j\omega)\} = \frac{-2\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}$.

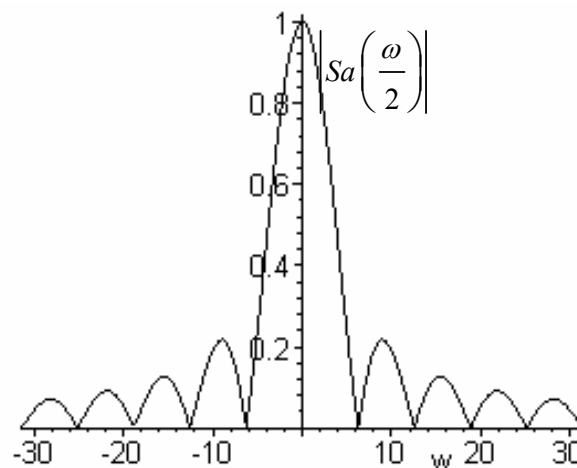
Ad. 2

Metodą różniczkowania otrzymujemy następującą transformatę Fouriera impulsu prostokątnego

$\Pi(t) \leftrightarrow \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (rys. poniżej).

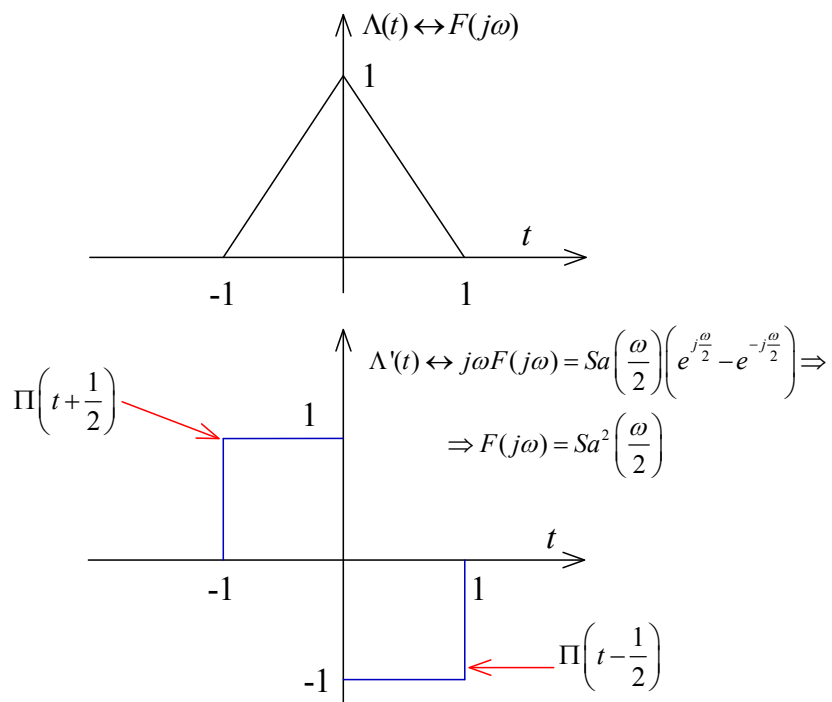


Widmo amplitudowe $|F(j\omega)| = \left|\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$ przedstawiono poniżej.

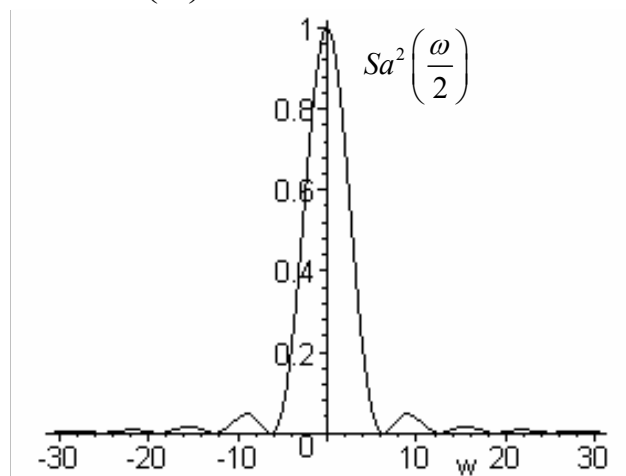


Ad. 3

Transformatę Fouriera $\Lambda(t)$ można wyznaczyć stosując metodę różniczkowania. Kolejne operacje przedstawiono na rysunku poniżej.



Widmo amplitudowe $|F(j\omega)| = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ przedstawiono poniżej.

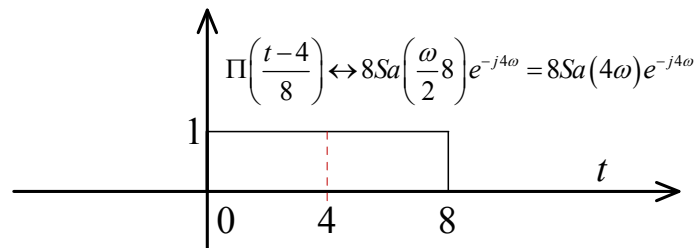


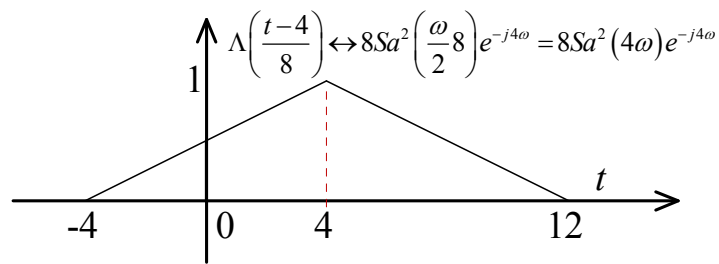
Wiadomo, że $F\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$, ponieważ

$$F\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ a } F\{\Lambda(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

z tego wynika, że $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$.

Ad. 4





Wykorzystano następujące właściwości transformaty Fouriera:

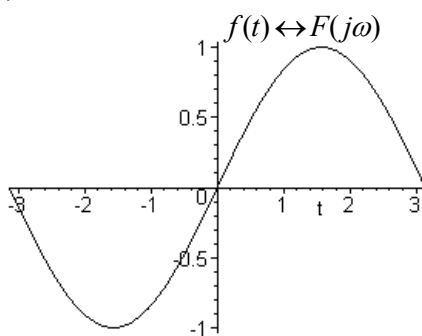
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega),$$

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0},$$

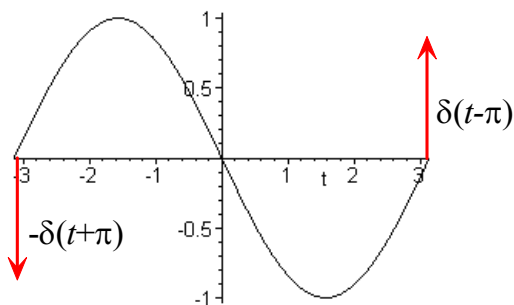
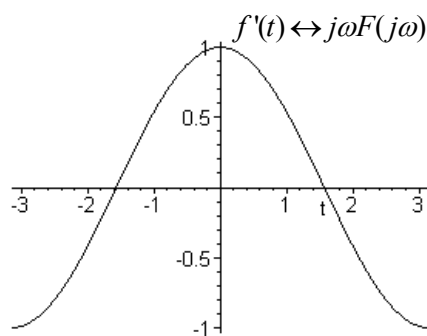
$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right).$$

Ad. 5

a)



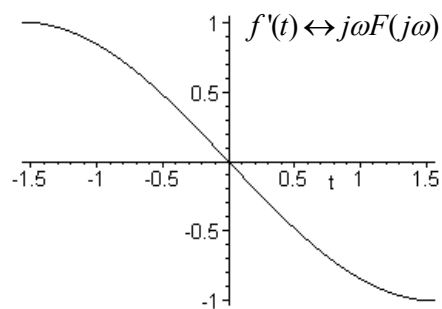
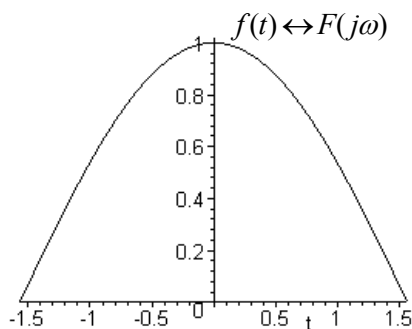
$f''(t)$

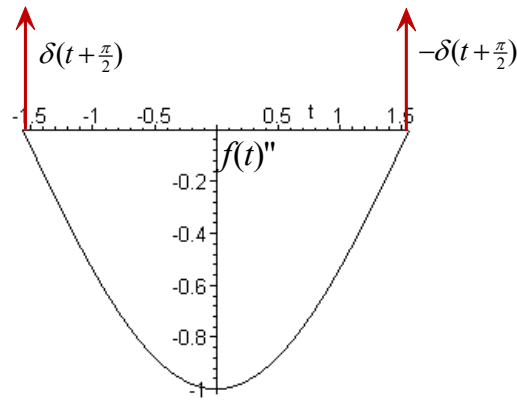


$$f''(t) \leftrightarrow -\omega^2 F(j\omega) = -F(j\omega) + e^{-j\omega\pi} - e^{j\omega\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\pi} - e^{j\omega\pi}}{1 - \omega^2} = j \frac{2\sin(\omega\pi)}{(\omega^2 - 1)}$$

b)





$$f''(t) \leftrightarrow -\omega^2 F(j\omega) = -F(j\omega) + e^{j\omega\frac{\pi}{2}} + e^{-j\omega\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{e^{j\omega\frac{\pi}{2}} + e^{-j\omega\frac{\pi}{2}}}{1 - \omega^2} = \frac{2\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}{1 - \omega^2}$$

c)

$$f(t) = 5 \left(\Pi\left(\frac{t+8}{4}\right) + \Pi\left(\frac{t-8}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{t+8}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{t-8}{2}\right) \right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 5 \left(4Sa\left(4\frac{\omega}{2}\right)(e^{j8\omega} + e^{-j8\omega}) + 2Sa^2\left(2\frac{\omega}{2}\right)(e^{j8\omega} + e^{-j8\omega}) \right) = 20\cos(8\omega)(2Sa(2\omega) + Sa^2(\omega))$$

d)

$$f(t) = 10 \left(\Pi\left(\frac{t+8}{4}\right) + \Pi\left(\frac{t-8}{4}\right) - \Lambda\left(\frac{t+8}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{t-8}{2}\right) \right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 10 \left(4Sa\left(4\frac{\omega}{2}\right)(e^{j8\omega} + e^{-j8\omega}) - 2Sa^2\left(2\frac{\omega}{2}\right)(e^{j8\omega} + e^{-j8\omega}) \right) = 40\cos(8\omega)(2Sa(2\omega) - Sa^2(\omega))$$

Ad. 6

a)

$$f(t) = 10e^{-2|t|} = 10(e^{2t}1(-t) + e^{-2t}1(t)) \leftrightarrow 10 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1 - j\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{2}} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{1}{2 - j\omega} + \frac{1}{2 + j\omega} \right) = \frac{40}{4 + \omega^2}$$

Wykorzystano następujące właściwości transformaty Fouriera (jeśli $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$):

$$F\{f(-t)\} = F(-\omega), \quad F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right), \quad F\{e^{-\alpha t}1(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

b) $f(t) = Ae^{-\alpha t}1(t) \leftrightarrow \frac{A}{\alpha + j\omega},$

c) $f(t) = te^{-\alpha t}1(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} F(j\omega) = j \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2},$

wykorzystano właściwość transformaty Fouriera: $F\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(j\omega).$

d)

$$f(t) = \sin(t)[1(t) - 1(t - 2n\pi)] \Rightarrow$$

$$f'(t) = \cos(t)[1(t) - 1(t - 2n\pi)] + \sin(t)[\delta(t) - \delta(t - 2n\pi)] = \cos(t)[1(t) - 1(t - 2n\pi)] \Rightarrow ,$$

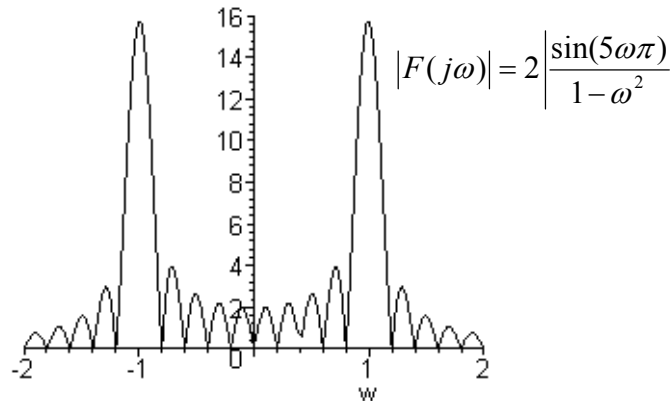
$$f''(t) = -\sin(t)[1(t) - 1(t - 2n\pi)] + \cos(t)[\delta(t) - \delta(t - 2n\pi)] = -f(t) + \delta(t) - \delta(t - 2n\pi)$$

ponieważ

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f''(t) \leftrightarrow -\omega^2 F(j\omega) = -F(j\omega) + 1 - e^{-j\omega 2n\pi} \Rightarrow$$

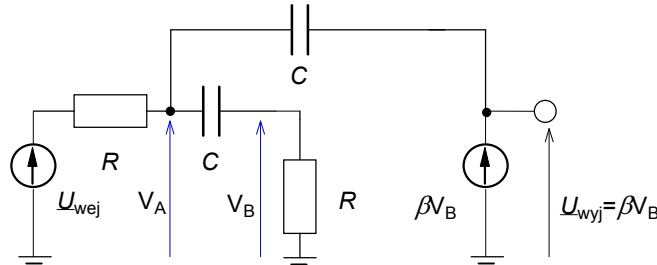
$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega 2n\pi}}{1 - \omega^2} = \frac{e^{-j\omega n\pi} (e^{j\omega n\pi} - e^{-j\omega n\pi})}{1 - \omega^2} = 2je^{-j\omega n\pi} \frac{\sin(\omega n\pi)}{1 - \omega^2} = 2e^{-j(\omega n\pi - \frac{\pi}{2})} \frac{\sin(\omega n\pi)}{1 - \omega^2}$$

Widmo amplitudowe tego sygnału np. dla $n = 5$ przedstawiono poniżej:



Ad. 7

Aby wyznaczyć $H(j\omega)$ badanego układu zastosujemy metodę napięć węzłowych.



Równania wynikające z metody napięć węzłowych są następujące:

$$1) \quad \left(\frac{1}{R} + 2sC \right) V_A - \frac{1}{R} U_{wej} - sC V_B - sC U_{wyj} = 0,$$

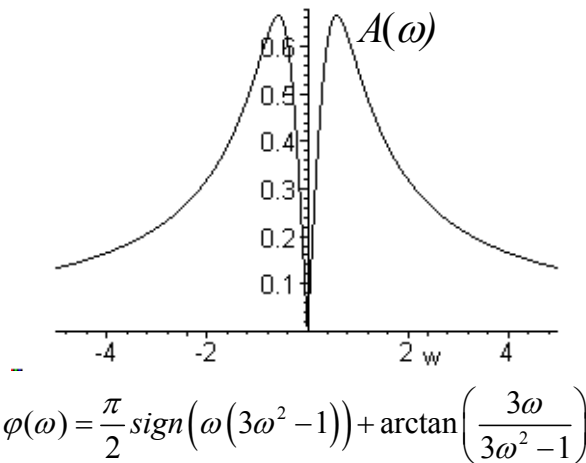
$$2) \quad -sC V_A + \left(\frac{1}{R} + sC \right) V_B = 0,$$

$$3) \quad U_{wyj} = \beta V_B.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy: $\frac{U_{wyj}}{U_{wej}} = \frac{\beta CRs}{C^2 R^2 (1 - \beta)s^2 + 3CRs + 1} = \frac{-2s}{3s^2 + 3s + 1}.$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{-2j\omega}{1 - 3\omega^2 + 3j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

gdzie $A(\omega) = \frac{2|\omega|}{\sqrt{9\omega^4 + 3\omega^2 + 1}}$ (charakterystyka amplitudowa),

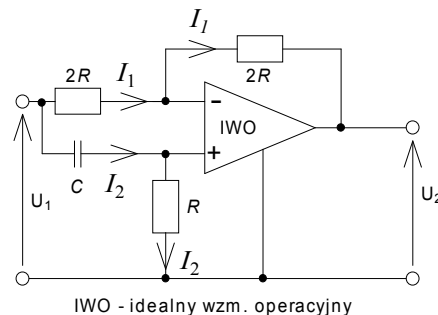


(wykorzystano zależność $\arg\{a + jb\} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(b) - \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$)

Ad. 8

Zastosujmy metodę 'hop-hop'. Metoda ta polega na tym, że układamy tylko równania wynikające z I i II prawa Kirchhoffa oraz prawa Ohma, zakładając, że IWO ma następujące właściwości:

1. $U^+ - U^- = 0$ (różnica napięć na wejściu + i - jest równa zero; zwierzać tych węzłów jednak nie wolno),
2. prądy wpływające do wejścia + i - są równe zero.



IWO - idealny wzmacniacz operacyjny

Można ułożyć, zatem następujące równania (liczba równań musi być równa liczbie niewiadomych – U_1 jest znaną wielkością):

1. $U_1(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I_2,$
2. $U_2(s) = -I_1 2R + I_2 R$
3. $I_1 2R = \frac{1}{sC} I_2.$

Rozwiązując ten układ otrzymuje się: $\frac{U_2}{U_1} = H(s) = -\frac{1 - sRC}{1 + sRC}.$

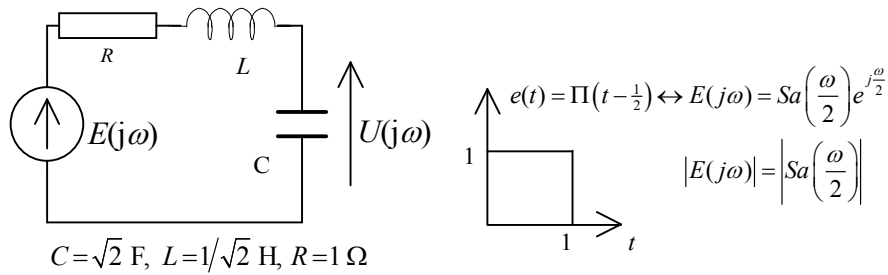
Charakterystyka amplitudowa:

$$A(\omega) = \left| H(s) \Big|_{s=j\omega} \right| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1 \text{ - układ wszechprzepustowy.}$$

Charakterystyka fazowa:

$$\varphi(\omega) = -\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\omega) + \arctan\left(\frac{C^2 R^2 \omega^2 - 1}{2CR\omega} \right) \right).$$

Ad. 9



Transmitancja układu wynosi

$$\frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{j\omega\sqrt{2}}}{1 + j\omega\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{j\omega\sqrt{2}}} = \frac{1 - \omega^2 - j\sqrt{2}\omega}{1 + \omega^4} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}} e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = -\left(\frac{\pi}{2} \text{sign}(\omega) + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(\omega^2 - 1)}{2\omega}\right)\right).$$

Charakterystyka amplitudowa : $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}}$.

Widmo amplitudowe sygnału $u(t)$ opisane jest następującą zależnością:

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 1}} \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|.$$

Ad. 10

Energia sygnału na wejściu filtru:

$$1. \text{ Z definicji : } E_{wej} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 4 \left[\frac{1}{-2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = 2.$$

2. Z tw. Parsewala :

$$f(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} \Rightarrow$$

$$3. \Rightarrow E_{wej} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{1 + \omega^2} d\omega =$$

$$= \frac{4}{2\pi} [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Energia sygnału na wyjściu filtru :

1. Z tw. Parsewala:

$$E_{wyj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |R(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{4}{1 + \omega^2} d\omega =$$

$$= \frac{4}{2\pi} [\arctan(\omega)]_{-1}^1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

Ad. 11

Energia sygnału: $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a}$.

Aby określić szerokość zajmowanego przez ten sygnał pasma należy skorzystać z tw. Parsewala, najpierw wyznaczając transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ (patrz zad. a) $f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$.

Zatem należy rozwiązać następujące równanie całkowe:

$$\frac{99}{100} E_s = \frac{99}{100a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \frac{4a^2}{(\omega^2 + a^2)^2} d\omega.$$

Wykorzystując zależność: $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{2a^3}$, równanie całkowe przekształca się do równania:

$$200\left(\omega_g^2 + a^2\right) \arctan\left(\frac{\omega_g}{a}\right) - 99\pi\omega_g^2 + 200a\omega_g - 99\pi a^2 = 0.$$

Dzieląc obydwie strony równania przez a^2 i podstawiając $x = \frac{\omega_g}{a}$ otrzymuje się równanie:

$$200(x^2 + 1) \arctan(x) - 99\pi x^2 + 200x - 99\pi = 0.$$

Aby otrzymać rozwiązanie tego równania należy skorzystać z jednej z metod numerycznych, np. metody Newtona, otrzymamy $x = \frac{\omega_g}{a} \approx 3.372250562$. Czyli $\omega_g \approx 3.37a$.

Ad. 11

Skorzystajmy z podstawowego warunku realizowalności

$$\mathcal{F}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\omega^2 + b^2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + b^2} d\omega = \frac{a}{2b} e^{-b|t|} \text{ (całka wzięta z tablic)}.$$

Z powyższej zależności widać, że $h(t) \neq 0$ dla $t < 0$ (czyli układ odpowiada wcześniej niż przyłożone pobudzenie $\delta(t)$), zatem podstawowy warunek realizowalności nie jest spełniony. Nie istnieje taki układ SLS, którego charakterystyka widmowa mogłaby być opisana zależnością $H(j\omega)$. Przepisując $H(j\omega)$ w innej postaci i podstawiając $j\omega = s$ otrzymujemy

$$H(s) = \frac{a}{(b+s)(b-s)}.$$

Ta postać wyjaśnia, że $H(j\omega)$ nie może być charakterystyką widmową układu realizowanego, gdyż jest to układ niestabilny w sensie BIBO (jeden z biegunów $H(s)$ leży w prawej półpłaszczyźnie).

DODATEK

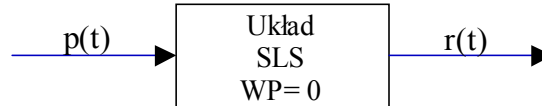
(poruszane problemy wykraczają poza zakres materiału)

Stabilność układów SLS. Stabilność w sensie BIBO

Stabilność układów stanowi ważny problem teoretyczny i praktyczny. Dotyczy on zarówno układów do przetwarzania i transmisji sygnałów, jak i układów służących do ich generacji. Układy należące do pierwszej grupy powinny być stabilne, m.in. po to, by nie wnosić własnych składowych do sygnałów użytecznych, układy drugiej grupy – powinny generować sygnały o założonych parametrach. Niezamierzona niestabilność może być przyczyną awarii lub zniszczenia układu.

Dany układ, zależnie od wyboru zmiennych do opisu, może być uznany za stabilny, albo za niestabilny. Na przykład, jeśli za reakcję samochodu wybierzemy jego prędkość, będzie on stabilny, natomiast, jeśli będzie nią pokonana droga, będzie on niestabilny (droga rośnie z czasem jak jedzie samochód). Oczywiście, przy założeniu, że samochód jest niezniszczalny.

Rozważmy obecnie inny rodzaj stabilności, a mianowicie stabilność względem pobudzenia. Potraktujemy obwód SLS jako układ transmisyjny o WP równych zero, z jednym wejściem i jednym wyjściem (rys. 1).



Rys. 1 Układ SLS z jednym wejściem i jednym wyjściem.

Założmy, że reakcja impulsowa układu $h(t)$ i pobudzenie $p(t)$ są funkcjami przyczynowymi, tzn., że $h(t) = 0$ i $p(t) = 0$ dla $t < 0$.

Definicja stabilności BIBO

Układ SLS nazywamy stabilnym w sensie **BIBO**, jeżeli dla każdego ograniczonego i przyczynowego pobudzenia $p(t)$, tj. takiego, że

$$|p(t)| \leq C_p < \infty, \quad t \geq 0$$

reakcja układu jest ograniczona, tzn.

$$|r(t)| \leq C_r < \infty, \quad t \geq 0.$$

Na podstawie tej definicji trudno zbadać, czy dany układ jest, czy też nie stabilny. Następujące twierdzenie rozstrzyga to zagadnienie na podstawie reakcji impulsowej układu.

Twierdzenie 1

Układ SLS jest stabilny w sensie **BIBO** wtedy i tylko wtedy, gdy jego charakterystyka impulsowa $h(t)$ ma postać: $h(t) = a_o \delta(t) + h_o(t)$, a_o – dowolna liczba rzeczywista i jest spełniony warunek:

$$C_o \equiv |a_o| + \int_{0-}^{\infty} |h_o(t)| dt < \infty.$$

Dla układów SLS funkcja $H(s)$ jest wymierna, czyli o postaci

$$H(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad (*)$$

gdzie $L(s)$ i $M(s)$ – wielomiany zmiennej s ($M(s)$ – wielomian charakterystyczny układu), to można sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2

Jeżeli $L(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych czynników, to powyższe sformułowanie można zastąpić równoważnym:

dla układu SLS stabilnego w sensie **BIBO**:

(1) $\text{st } L(s) \leq \text{st } M(s)$,

(2) $M(s) \neq 0$ dla $\text{Re } s \geq 0$.

Wszystkie podane wyżej warunki są zarówno konieczne jak i wystarczające dla BIBO stabilności układów SLS.

Definicja

Wielomian $M(s)$, który nie ma pierwiastków dla $\text{Re } s \geq 0$ nazywamy wielomianem Hurwitza.

Jeżeli więc zadana jest funkcja układu SLS o postaci (*), to zbadanie tego, czy funkcja ta opisuje układ BIBO stabilny, można sprowadzić do sprawdzenia warunków (1) i (2), przy założeniu, że nie posiadają wspólnych czynników dla $\text{Re } s \geq 0$.

Sprawdzenie warunku (1) jest trywialne. Podamy więc sposób na sprawdzenie warunku (2), bez potrzeby wyznaczania położenia pierwiastków wielomianu $M(s)$.

Warunkiem koniecznym na to, by wielomian $M(s) \in \text{WH}$ jest to wszystkie współczynniki wielomianu były różne od zera i tego samego znaku. Jest to także warunek dostateczny dla wielomianów stopnia $n \leq 2$.

Spełnienie warunku dostatecznego jest testowane za pomocą opisanych niżej kryteriów algebraicznych.

Kryterium 1

Wyznaczamy część parzystą i nieparzystą wielomianu charakterystycznego $M(s)$:

$$P(s) = [M(s) + M(-s)]/2 - \text{część parzysta } M(s),$$

$$N(s) = [M(s) - M(-s)]/2 - \text{część nieparzysta } M(s)$$

przy tym, oczywiście $M(s) = P(s) + N(s)$.

Zdefiniujmy funkcję: $F(s) = P(s)/N(s)$, gdy $\text{st } [P(s)] > \text{st } [N(s)]$, natomiast, gdy $\text{st } [P(s)] < \text{st } [N(s)]$ to $F(s) = N(s)/P(s)$ i zapiszmy $F(s)$ w postaci ułamka łańcuchowego o postaci:

$$F(s) = q_1 s + \frac{1}{q_2 s + \frac{1}{\bullet + \frac{1}{\bullet + \frac{1}{q_n s}}}}$$

$M(s)$ jest wielomianem Hurwitza ($M(s) \in \text{WH}$) wtedy, i tylko wtedy, gdy: $q_i > 0$ dla $i=1, 2, \dots, n$, gdzie $n = \text{st } [M(s)]$.

Kryterium 2 – kryterium (algebraiczne) Routha Hurwitza

Tworzymy tablicę współczynników wielomianu: $M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ o $n+1$ wierszach, jak to pokazano poniżej.

Tablica Routha-Hurwitza

(1)	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
(2)	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
(3)	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...
(4)	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	...
(...)
(n+1)

Wiersze od 3. do $n+1$ tworzymy wg podanego niżej schematu:

- wiersz (3) tworzymy na podstawie wierszy (1) i (2), korzystając przy tym ze wzorów:

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-2}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-4}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \dots$$

- wiersz (4) tworzymy na podstawie wierszy (2) i (3):

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \quad c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}, \dots$$

pozostałe wiersze tablicy Routha – Hurwitza (aż do $n+1$) wypisuje się wg tych samych reguł. Sprowadzają się one do realizacji następującej procedury:

1. wpisujemy współczynniki wielomianu $M(s)$ w dwóch pierwszych wierszach, w kolejności malejących potęg s , na przemian – wiersz górny, wiersz dolny, przesuwając się ruchem zygzakowym z lewa na prawo,
2. współczynniki pozostałych wierszy obliczamy wg powyższych wzorów, przy tym zawsze w pierwszej kolumnie wyznacznika stoją dwa elementy pierwszej kolumny i dwóch wierszy leżących bezpośrednio powyżej obliczanego, a w drugiej - dwa elementy tych wierszy i kolumny przesuniętej o jedną pozycję na prawo.
3. jeśli w pierwszej kolumnie wystąpi element mniejszy lub równy zero (koniec testu!), lub nie ma $n+1$ elementów większych od zera ($a_n > 0$) - $M(s) \notin WH$.
4. element kolumn 2, 3 i dalszych, równy zero, nie jest wpisywany, z tego też powodu brak elementu jest równoważny elementowi równemu zero na danej pozycji.

Kryterium Routha-Hurwitza

$M(s)$ jest wielomianem Hurwitza wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy pierwszej kolumny są dodatnie (ujemne) i ich liczba jest równa liczbie współczynników wielomianu $M(s)$, tj. $n+1$:

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, b_{n-1} > 0, c_{n-1} > 0, \dots$$

Przykład 1

Niech $M(s) = s^5 + 8s^4 + 6s^3 + 32s^2 + 8s + 24$, wówczas: $P(s) = 8s^4 + 32s^2 + 24$, $N(s) = s^5 + 6s^3 + 8s$, $F(s) = N(s) / P(s)$.

Wykonujemy dzielenie: $(s^5 + 6s^3 + 8s)$ przez $(8s^4 + 32s^2 + 24)$ otrzymujemy: $1/8s$ oraz resztę $(2s^3 + 5s)$. Następnie dzielimy $(8s^4 + 32s^2 + 24)$ przez resztę $(2s^3 + 5s)$ i otrzymujemy $4s$ i resztę $12s^2 + 24$. Procedurę tą powtarzamy łącznie 5 razy i otrzymujemy:

$$F(s) = \frac{1}{8}s + \frac{1}{4s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{1}{12s + \frac{1}{\frac{1}{24}s}}}}$$

Dla wielomianu $M(s)$ 5. stopnia otrzymaliśmy rozkład na ułamek łańcuchowy z pięcioma współczynnikami $q_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, 5$, stąd wniosek: $M(s) \in WH$.

Zastosujmy kryterium Routha – Hurwitza dla badanego wielomianu $M(s)$. Otrzymujemy poniższą tablicę.

1	6	8
8	32	24
2	5	
12	24	
1		
24		

Współczynniki pierwszej kolumny tej tablicy są dodatnie i jest ich $n+1 = 6$. Wniosek jest identyczny jak poprzednio: $M(s) \in WH$.

Przekształcenie całkowe Fouriera (PCF)– właściwości i zastosowanie

Para przekształceń całkowych o postaci:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

nazywana jest parą transformat Fouriera, gdzie $F(j\omega)d\omega/(2\pi)$ - zespolona amplituda prądu o pulsacji ω . Wzory (3) i (2) noszą również, odpowiednio, nazwę prostego i odwrotnego przekształcenia całkowego Fouriera, co zapisujemy symbolicznie: $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ oraz $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$.

Jeżeli:

1. $f(t)$ jest ograniczona w każdym ograniczonym podprzedziale (t_1, t_2) , oraz podprzedział ten można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja ta zmienia się monotonicznie,
2. $f(t)$ jest ciągła w każdym podprzedziale (t_1, t_2) , z wyjątkiem skończonej liczby punktów nieciągłości typu skokowego,
3. $f(t)$ jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$,
wówczas równość:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

zachodzi prawie wszędzie. Wzór (4) nosi nazwę wzoru całkowego Fouriera.

Jeżeli $f(t)$ jest funkcją rzeczywistą, wówczas uwzględniając postać funkcji podcałkowej w (3), $F(j\omega) = F^*(-j\omega)$. Zapisując $F(j\omega)$ w postaci wykładniczej $F(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, otrzymujemy: $A(\omega) = A(-\omega)$, $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$, gdzie $A(\omega)$ – charakterystyka amplitudowa – (funkcja parzysta ω), $\varphi(\omega)$ – charakterystyka fazowa sygnału $f(t)$ (funkcja nieparzysta ω). $F(j\omega)$ nosi nazwę funkcji widmowej sygnału. Wykorzystując te oznaczenia możemy wzór (3) zapisać dla $f = \omega/(2\pi)$ w postaci:

$$f(t) = \int_0^{\infty} 2A(f)df \cos(2\pi ft + \varphi(f)) \quad (5)$$

Wzór (5) pozwala nadać interpretację fizyczną widmu amplitudowemu i fazowemu sygnału w dziedzinie częstotliwości f . W odróżnieniu od widma sygnału okresowego widma sygnałów nieokresowych są na ogół funkcjami ciągłymi zmiennej ω .

Jeżeli sygnały nie spełniają warunku bezwzględnej całkowalności, wówczas możemy rozszerzyć klasę funkcji opisywanych w dziedzinie częstotliwości za pomocą transformat Fouriera o funkcje zawierające dystrybucje delta Diraca i funkcje skokowe w dziedzinie zmiennej ω .

Z postaci prostego i odwrotnego przekształcenia Fouriera wynikają podane niżej właściwości. Pozwalają one lepiej zrozumieć relacje zachodzące pomiędzy dziedzinami czasu i częstotliwości. Będziemy zakładali, że odpowiednie transformaty Fouriera istnieją.

Właściwości przekształcenia całkowego Fouriera (PCF)

1. Liniowość

$$\sum_i a_i f_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i F_i(j\omega)$$

2. Symetria ($f(t) \leftrightarrow H(j\omega)$)

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega), \quad F(t) = F(j\omega)|_{\omega \rightarrow t}, \quad f(-\omega) = f(t)|_{t \rightarrow -\omega}$$

3. Różniczkowanie funkcji czasu

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega).$$

Różniczkowanie uwypukla obecność w widmie sygnału składowych wysoko-
częstotliwościowych kosztem składowych wolnozmiennych.

4. Całkowanie funkcji czasu

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Całkowanie dyskryminuje składowe wysokoczęstotliwościowe kosztem składowych nisko-
częstotliwościowych.

5. Różniczkowanie funkcji $F(\omega)$

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

6. Przesunięcie funkcji czasu

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Przesunięcie przebiegu $f(t)$ w czasie o t_0 nie zmienia jego widma amplitudowego. Widmo
fazowego jest korygowane przez liniowo zmienną, w funkcji ω , składową - ωt_0 .

7. Twierdzenie o modulacji w dziedzinie czasu i częstotliwości (ω_0 – pulsacja, T – stała
czasowa)

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega - \omega_0)] \text{ (por. właściwość 6)}$$

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[F[j(\omega + \omega_0)] + F[j(\omega - \omega_0)]]$$

$$\frac{1}{2}[f(t+T) + f(t-T)] \leftrightarrow F(j\omega) \cos(\omega T)$$

Modulacja w dziedzinie czasu/częstotliwości powoduje przesunięcie w dziedzinie
częstotliwości/czasu.. Obserwowana symetria wynika z właściwości (2).

8. Splot funkcji $f(t)$ i $h(t)$ całkowalnych z kwadratem

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \leftrightarrow F(j\omega)H(j\omega)$$

W dziedzinie częstotliwości operacji splotu dwóch funkcji czasu odpowiada operacja
mnożenia funkcji widmowych obydwu funkcji.

9. Iloczyn funkcji czasu

$$f(t) g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\eta)G[j(\omega - \eta)] d\eta$$

10. Zmiana skali czasu i częstotliwości (twierdzenie o podobieństwie)

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right), \Rightarrow f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

Kompresja czasowa sygnału powoduje jego rozciągnięcie w dziedzinie częstotliwości i
odwrotnie, rozciągnięcie w dziedzinie czasu powoduje kompresję widma sygnału. Tak więc
sygnały szybkozmiennne charakteryzują się szerszym widmem niż sygnały wolnozmiennne.

11. Funkcja przyczynowa bezwzględnie całkowalna

$$f(t)l(t) \leftrightarrow F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Reakcja impulsowa układu BIBO stabilnego SLS

$$h(t) \leftrightarrow H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

Funkcja układu jest równa transformacie Fouriera jego reakcji impulsowej.

12. Funkcja okresowa (por. twierdzenie o modulacji)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{F}_n e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{F}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Widmo funkcji okresowej (funkcji o nieograniczonej energii i skończonej mocy średniej) zawiera impulsy delta Diraca przy pulsacjach $n\omega_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pomnożone przez $2\pi F_n$.

13. Funkcja próbkowana z okresem $T=2\pi/\omega_0$:

$$f_s(t) = f(t) \delta_p(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_0)]$$

Widmo funkcji spróbkowanej (funkcji $f(t)$ zmodulowanej przez periodyczny ciąg $\delta_p(t)$) jest przebiegiem periodycznym utworzonym przez poprzesuwanie o wielokrotność pulsacji $\omega_0 = 2\pi/T$ widmo $f(t)$.

14. Jeżeli sygnał $f(t)$ jest funkcją parzystą t , tj. $f(t) = f(-t)$, wówczas $F(j\omega)$ – funkcja rzeczywista ω .

15. Jeżeli sygnał $f(t)$ jest funkcją nieparzystą t , tj. $f(t) = -f(-t)$, wówczas $F(j\omega)$ – funkcja urojona ω .

Ważniejsze transformaty Fouriera

1. Delta Diraca: $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (na podstawie właściwości próbkującej $\delta(t)$). Funkcja widmowa stała i rzeczywista.

2. Skok jednostkowy: na podstawie właściwości (3):

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

3. Funkcja stała $f(t) = A = \text{const.}$, $A \leftrightarrow 2\pi A \delta(\omega)$ (na podstawie symetrii PCF). W widmie występuje tylko składowa stała.

4. Funkcja „znak” – $\text{sgn}(t) = 2 \cdot 1(t) - 1 \leftrightarrow 2/(j\omega)$. Dominacja składowych niskoczęstotliwościowych. Widmo fazowe $\varphi(\omega) = -\text{sgn}(\omega) \pi/2$.

5. Funkcja $\text{sgn}(\omega)$ (na podstawie symetrii PCF):

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}(\omega)$$

6. Funkcja $1(\omega)$ (na podstawie twierdzenia o symetrii):

$$\frac{1}{2} \left[\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] \leftrightarrow 1(\omega)$$

7. Funkcja próbkująca z okresem $T = 2\pi/\omega_0$:

$$\delta_p(t, T) = \delta_T(t) \leftrightarrow \omega_0 \delta_p(\omega, \omega_0)$$

Widmo jest także funkcją próbkującą w dziedzinie częstotliwości pomnożoną przez ω_0 .

8. Przyczynowa funkcja wykładnicza: $e^{-a} 1(t) \leftrightarrow 1/(a+j\omega)$. Widmo amplitudowe i fazowe.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

9. Funkcja bramkowa: $f_b(t) = 1(t+T) - 1(t-T) \leftrightarrow 2T \text{Sa}(\omega T)$, ($\text{Sa}(x) = \sin(x)/x$), oraz na zasadzie symetrii: $(\omega_0/\pi) \text{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow [1(\omega + \omega_0) - 1(\omega - \omega_0)]$

$$10. \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Gęstość widmowa energii sygnału

Niech $f(t)$ będzie sygnałem rzeczywistym o skończonej energii, tj. takim, że $f(t) = f^*(t)$ i

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (6)$$

Poszukujemy wyrażenia na energię sygnału $f(t)$ opisanego w dziedzinie częstotliwości za pomocą funkcji $F(j\omega)$. W tym celu wykorzystamy PCF:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

i zapiszemy funkcję podcałkową w (6) w postaci:

$$|f(t)|^2 = f^*(t) f(t) = f^*(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Stąd

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-j\omega t}]^* dt \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie Parsewala (zwane twierdzeniem Parsewala) o postaci:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega,$$

które można zapisać w postaci równoważnej:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(2\pi f) df = 2 \int_0^{\infty} A^2(f) df,$$

gdzie $A(f)$ – charakterystyka amplitudowa sygnału w dziedzinie częstotliwości $f = \omega/(2\pi)$.

Wyrażenie

$$dW = A^2(f) df,$$

określa energię elementarnej składowej sygnału $f(t)$, której widmo leży w przedziale $\{f, f+df\}$, natomiast

$$\frac{dW}{df} = A^2(f),$$

widmową gęstość energii przy częstotliwości f . Energia sygnału nie zależy natomiast od charakterystyki fazowej. Zmiana widma fazowego wpływa jednak na kształt sygnału.