

Pierwsze rozwiązanie bazowe rozwiązanie dopuszczalne

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$x_0 = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N) x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Wprowadzone oznaczenia:

$$y_0 \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad y_j \equiv \begin{bmatrix} c_B B^{-1}a_j - c_j \\ B^{-1}a_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_j, j \in R$ oznaczają kolumny macierzy N .

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j, \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

Postać początkowej tablicy simpleksowej

$$\begin{array}{c|c|c}
 & & -x_N \\
 \hline
 x_0 & c_B B^{-1} b & c_B B^{-1} N - c_N \\
 \hline
 x_B & B^{-1} b & B^{-1} N \\
 \hline
 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c}
 & & -x_N \\
 \hline
 x_0 & 0 & -c_N \\
 \hline
 x_B & b & N \\
 \hline
 \end{array}$$

Polepszanie rozwiązania bazowego dopuszczalnego

$$x_0 = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

zawsze $x_j \geq 0$,

zatem gdy $x_k \uparrow$ to również $x_0 \uparrow$ gdy $y_{0k} \leq 0$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j, \quad \text{dla } i = 1, \dots, m$$

Polepszanie bazowego rozwiązania dopuszczalnego

$$\theta_{rk} = \min_{i=1, \dots, m} (y_{i0} / y_{ik}, y_{ik} > 0).$$

$$x_k = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R - \{k\}} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} x_j - \frac{1}{y_{rk}} x_{Br}$$

$$x_{B_i} = \left(y_{i0} - \frac{y_{ik} y_{r0}}{y_{rk}} \right) - \sum_{j \in R - \{k\}} \left(y_{ij} - \frac{y_{ik} y_{rj}}{y_{rk}} \right) x_j + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} x_{Br}$$

Gdy mamy nie-zdegenerowane rozwiązanie bazowe dopuszczalne takie, że

$$y_{0j} < 0 \text{ dla pewnego } j = k, k \in R \text{ oraz } y_{ik} > 0$$

dla przynajmniej jednego i wówczas można z niego otrzymać lepsze bazowe rozwiązanie dopuszczalne przez wymianę jednej z kolumn macierzy B na kolumnę macierzy N .



Optymalne rozwiązanie zadania PL metodą simpleks

Twierdzenie:

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań $Ax=b$

jest rozwiązaniem optymalnym zadania PL, jeśli są spełnione dwa warunki:

(i) Warunek prymalnej dopuszczalności:

$$y_{io} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

(ii) Warunek optymalności

$$y_{0j} \geq 0 \quad dla \quad \forall j \in R$$

Pierwsza tablica simpleks

		...	$-x_j$...	$-x_k$...
x_0	y_{00}	...	y_{0j}	...	y_{0k}	...
	
x_{Bi}	y_{i0}	...	y_{ij}	...	y_{ik}	...
	
x_{Br}	y_{r0}	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...
	
x_{Bm}	y_{m0}	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...

Polepszona tablica simpleks

		...	$-x_j$...	$-x_{Br}$..
x_0	$y_{00} - (y_{0k} y_{r0} / y_{rk})$...	$y_{0j} - (y_{0k} y_{rj} / y_{rk})$...	$-y_{0k} / y_{rk}$	
	
x_{Bi}	$y_{i0} - (y_{ik} y_{r0} / y_{rk})$...	$y_{ij} - (y_{ik} y_{rj} / y_{rk})$		$-y_{ik} / y_{rk}$	
	
x_k	y_{r0} / y_{rk}	...	y_{rj} / y_{rk}	...	$1 / y_{rk}$..

Algorytm simpleks (prymalny)

Krok 1. (start). Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność

rozwiązania: czy $y_{i0} \geq 0$ dla $i = 1, \dots, m$ Tak - idź do kroku 2, Nie – STOP.

Krok 2. (test optymalności). Czy $y_{0j} \geq 0$ dla każdego $j \in R$?

- Tak - to aktualne rozwiązanie jest optymalne.
- Nie - idź do kroku 3.

Krok 3. (Wybór zmiennej wchodzącej do bazy). Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną x_k , $k \in R$ dla której $y_{0k} < 0$.

Typową regułą jest wybór zmiennej x_k jest reguła dla której:

$$y_{0k} = \min_{j \in R} \{y_{0j}, y_{0j} \leq 0\}$$

Idź do kroku 4.

Algorytm simpleks (prymalny) c.d.

Krok 4. (wybór zmiennej usuwanej z bazy). Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną x_{Br} , dla której

$$\theta_{rk} = \min_{i=1, \dots, m} (y_{i0} / y_{ik}, y_{ik} > 0).$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.

Idź do kroku 5.

Krok 5. (eliminacja Gauss'a). Wyznacz x_k oraz $x_{Bi}, i \neq R$, względem zmiennych $x_j, j \in R - \{k\}$ oraz zmiennej x_{Br} zgodnie z wyprowadzonym wzorem.

Podstaw $x_j = 0, j \in R - \{k\}$ i $x_{Br} = 0$

aby otrzymać nowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Idź do kroku 2.

Krok ten czasami nazywa się wymianą zmiennej bazowej (piwotyzacją).

Metody numeryczne i optymalizacja

Dr inż. Ewa Szlachcic

Wydział Elektroniki PWr
AiR III r.

Schemat reguły wymiany zmiennych

- **p** - element centralny (główny)
- **q** – dowolny element w wierszu centralnym (głównym)
- **r** – dowolny element w kolumnie centralnej (głównej)
- **s** – dowolny pozostały element

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{q}{p} \\ -\frac{r}{p} & s - \frac{qr}{p} \end{bmatrix}$$

Przypadki szczególne

Założenia: algorytm simpleks startuje z bazowego dopuszczalnego rozwiązania oraz w trakcie jego realizacji nie występuje degeneracja.

I. Zadanie programowania liniowego - nieograniczone

Twierdzenie

Jeśli zadanie PL jest nieograniczone tzn. funkcja celu jest nieograniczona, to istnieją rozwiązania bazowe dopuszczalne x_B oraz wektor y_K taki, że:

$$y_{0k} < 0 \text{ i } y_{ik} \leq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m$$

Wówczas zbiór rozwiązań jest pusty.

Przykład: $\min x_0 = -x_1 - x_2,$

$$-x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze ograniczonym

- Ten przypadek wystąpi wtedy, gdy można znaleźć tablicę simpleksową, której odpowiada optymalne rozwiązanie bazowe, takie że:

$$y_{i_0} \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m \text{ oraz } y_{0j} \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n$$

i istnieje para $(i_0, j_0), i_0 \in \{1, \dots, m\}, j_0 \in \{1, \dots, n\}$

dla której: $y_{0j_0} = 0, y_{i_0 0} > 0 \text{ i } y_{i_0 j_0} > 0$

- Dla przestrzeni o wymiarze n rozwiązanie optymalne jest kombinacją wypukłą wierzchołków x^i należących do zbioru optymalnego.

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \hat{x}^i \quad \text{gdy} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1]$$

!! Dla rozwiązania zdegenerowanego, przypadek ten może zaistnieć również pod innymi warunkami.



Przykład gdy jest wiele rozwiązań optymalnych na zbiorze ograniczonym

$$\max x_0 = 4x_1 + 2x_2,$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze nieograniczonym

- Rozwiązanie optymalne zadania PL przyjmuje postać parametryczną:
 - Dla $n=2$ równanie parametryczne prostej,
 - Dla $n=3$ równanie parametryczne płaszczyzny itd.

Przykład: $\max x_0 = -2x_1 + 4x_2,$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadanie programowania liniowego – posiadające nieskończoną ilość rozwiązań optymalnych na zbiorze nieograniczonym

- Ten przypadek wystąpi dokładnie wtedy, gdy istnieje tablica simpleksowa, której odpowiada optymalne rozwiązanie bazowe, takie że:

$$y_{i0} \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, m \text{ oraz } y_{0j} \geq 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n$$

dla której istnieje j_0 takie, że $y_{0j_0} = 0$

i dla wszystkich i zachodzi:

$$y_{i0} = 0 \quad \text{bądź} \quad y_{ij_0} \leq 0$$