

II Zadanie programowania liniowego PL

$$\min x_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\dim \mathbf{x} = n, \dim \mathbf{c} = n$$

Macierz \mathbf{A} odpowiada za współczynniki w m ograniczeniach

$$\dim \mathbf{A} = [m \times n]$$

Wektor \mathbf{b} odpowiada za prawą stronę ograniczeń

$$\dim \mathbf{b} = m$$

Postać kanoniczna II zadania PL

$$\begin{aligned}\min \quad & x_0 = c^T x, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max \quad & -x_0 = -c^T x, \\ & -Ax + I_s x_s = -b, \\ & x, x_s \geq 0,\end{aligned}$$

Algorytm dualny simpleks

Krok 1. (start). Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszej tablicy dualnie dopuszczalnej. Należy sprawdzić dualną dopuszczalność

rozwiązania: czy $y_{oj} \geq 0$ dla $j \in R$ Tak - idź do kroku 2, Nie – koniec.

Krok 2. (test optymalności). Czy $y_{i0} \geq 0$ dla każdego $i = 1, \dots, m$?

- Tak - to aktualne rozwiązanie jest optymalne.
- Nie - idź do kroku 3.

Krok 3. (Wybór zmiennej usuwanej z bazy). Wybierz jako zmienną usuwaną z bazy taką zmienną x_{B_r} dla której $y_{r0} < 0$.

Typową regułą jest wybór zmiennej x_{B_r} dla której:

$$y_{r0} = \min_{j \in R} \{y_{io}, y_{i0} < 0, i = 1, \dots, m\}$$

Idź do kroku 4.

Algorytm dualny simpleks c.d.

Krok 4. (wybór zmiennej wprowadzanej do bazy). Wybierz jako zmienną wchodzącą do bazy taką zmienną x_k dla której

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = \max \left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0 \right).$$

Jeśli wiele zmiennych spełnia ten warunek, wybierz arbitralnie jedną z nich.

Idź do kroku 5.

Krok 5. (eliminacja). Dokonaj dualną iterację simpleksową metodą eliminacji

Gauss'a poprzez wprowadzenie x_k do bazy oraz usunięcie x_{B_r}

Idź do kroku 2.

Optymalne rozwiązanie II zadania PL metodą dualną simpleks

Twierdzenie:

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań $Ax=b$

jest rozwiązaniem optymalnym II zadania PL, jeśli są spełnione dwa warunki:

(i) Warunek dualnej dopuszczalności:

$$y_{oj} \geq 0 \quad dla \quad j \in R$$

(ii) Warunek dualnej optymalności

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

Przykład I zadania dualnego

$$\min v_0 = 5v_1 + 0v_2 + 21v_3$$

$$v_1 - v_2 + 6v_3 \geq 2$$

$$v_1 + v_2 + 2v_3 \geq 1$$

$$v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

Przykład II System cięcia dłużyć

$$\min v_0 = 0.3v_1 + 0.6v_2 + 0.2v_3$$

$$7v_1 + 3v_2 + 0v_3 \geq 2100$$

$$0v_1 + 1v_2 + 2v_3 \geq 1200$$

$$v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

III Zadanie programowania liniowego PL

$$\max f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy ograniczeniach: $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\dim \mathbf{x} = n, \dim \mathbf{c} = n$$

Macierze $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ odpowiadają za współczynniki w m_1 i m_2 ograniczeniach

$$\dim \mathbf{A}_1 = [m_1 \times n], \dim \mathbf{A}_2 = [m_2 \times n]$$

Wektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ odpowiadają za prawe strony ograniczeń

$$\dim \mathbf{b}_1 = m_1, \dim \mathbf{b}_2 = m_2$$



Zadanie programowania liniowego dla ograniczeń mniejszościowych i większościowych Metoda dwóch faz

I faza - należy znaleźć pierwsze rozwiązanie bazowe dopuszczalne poprzez rozwiązanie zadania pomocniczego

II faza - maksymalizacja funkcji celu x_0 dla następnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego wg algorytmu simpleks.

Algorytm simpleks (prymalny) – I faza Krok 1

Krok 1. (start). Rozpoczynamy algorytm od znalezienia pierwszego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Należy sprawdzić dopuszczalność

rozwiązania: czy $y_{i0} \geq 0$ dla $i = 1, \dots, m$ Tak - idź do kroku 2, Nie – STOP.

I faza metody PL

Rozwiązanie zadania pomocniczego PL

z funkcją celu = z_0

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_t \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Gdzie \mathbf{I}_t jest macierzą jednostkową rzędu t .

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_N + \mathbf{I}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}_N = \mathbf{b}_2$$

I faza metody PL cd.

Wprowadzamy wektor zmiennych pomocniczych x_α $\dim x_\alpha = m - t$

$$A_1 x_N + I_t x_t = b_1$$

$$A_2 x_N + I_{m-t} x_\alpha = b_2$$

Rozwiązanie bazowe dopuszczalne układu równań:

$$x_t = b_1, x_\alpha = b_2, x_N = 0$$

Należy znaleźć inne rozwiązanie bazowe dopuszczalne, w którym $x_\alpha = 0$
lub stwierdzić, że takie rozwiązanie nie istnieje.

I faza metody – zadanie pomocnicze

$$\max z_0 = \quad \quad \quad - 1x_\alpha,$$

$$x_0 - c_N x_N - c_t x_t = 0,$$

$$A_1 x_N + I_t x_t = b_1,$$

$$A_2 x_N + I_{m-t} x_\alpha = b_2,$$

$$x_N, x_t, x_\alpha \geq 0$$

Zmienna x_0 zawsze pozostaje zmienną bazową. Rozwiązaniem początkowym zadania I fazy jest

$$x_t = b_1 - A_1 x_N, x_\alpha = b_2 - A_2 x_N,$$

$$z_0 = 1(b_2 - A_2 x_N),$$

Oraz $x_N = 0$ $x_0 = c_t b_1 + (c_N - c_t A_1) x_N$

Wyznacznik macierzy bazowej

Twierdzenie

Niech $i=0,1,2,\dots$ Będą numerami tablic simpleksowych oraz niech B_i będzie macierzą bazową odpowiadającą i -tej tablicy.

Wówczas

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_0 \prod_{i=0}^p y_{r_i k_i},$$

Gdzie $y_{r_0 k_0} = 1$, a $y_{r_i k_i}$ jest elementem centralnym eliminacji przekształcającej $(i-1)$ -szą tablicę w i -tą tablicę.